Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Ano 2022

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Investigação científica em matemática e suas aplicações

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação científica em matemática e suas aplicações / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0116-2
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.162221205

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.
CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A realidade do país e as diferentes problemáticas evidenciadas ao longo dos anos têm demandado questões muito particulares e mobilizado pesquisadores em busca de respostas a inúmeras inquietudes. É inegável que a pesquisa científica se constitui como importante mecanismo na busca dessas respostas e no melhorar a vida das pessoas e, nesse ínterim, a Matemática ocupa um lugar importante.

É neste sentido que o livro "***Investigação Científica em Matemática e suas Aplicações***" nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências de pesquisadores vinculados a Matemática e Educação Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do Brasil e de outros países.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso abordaremos também nessa obra.

Esperamos que este livro, da forma como o organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso superior. Que, após essa leitura, possamos olhar para a sala de aula e para a Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejo, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

META-AVALIAÇÃO DE AVALIAÇÃO RELACIONADA À APRENDIZAGEM DE CONCEITOS LÓGICO-MATEMÁTICOS COM UTILIZAÇÃO DE JOGO DIGITAL

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 20/03/2022

Lucí Hildenbrand
Fundação Cesgranrio
Rio de Janeiro/RJ
http://lattes.cnpq.br/2878590969112991

Janaína de Oliveira Augusto
Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro/RJ
http://lattes.cnpq.br/0675843703533585

RESUMO: O estudo consiste em avaliação de avaliação da aprendizagem de conceitos lógico-matemáticos, por meio da utilização didático-pedagógica de jogo digital. Do tipo somativa, a meta-avaliação privilegiou os critérios fundamentais elencados por Davidson (validade, utilidade, conduta e credibilidade), à exceção de custos, porque contou com financiamento próprio. A partir das análises realizadas, que se mostraram consoantes com a teorização selecionada, pode-se afirmar que o estudo avaliativo atende a todos os critérios fundamentais de Davidson e que, com eles, mantém forte afinidade.
PALAVRAS-CHAVE: Meta-avaliação; Avaliação; Jogos Digitais.

EVALUATION META-ASSESSMENT RELATED TO LEARNING LOGICAL-MATHEMATICAL CONCEPTS WITH USE OF DIGITAL GAME

ABSTRACT: The study consists of evaluating the assessment of the learning of logical-mathematical concepts, through the didactic-pedagogical use of digital games. Of the summative type, the meta-evaluation privileged the fundamental criteria listed by Davidson (validity, usefulness, conduct and credibility), with the exception of costs because it had its own funding. From the analyzes carried out, which proved to be consonant with the selected theorization, it can be said that the evaluative study meets all of Davidson's fundamental criteria and that, with them, it maintains a strong affinity.
KEYWORDS: Meta-evaluation; Evaluation; Digital games.

1 | SOBRE META-AVALIAÇÃO

Cada vez mais estudada e utilizada para certificar a qualidade de processos avaliativos, na prática, a meta-avaliação se consagra como metodologia, procedimento ou técnica profícua e oportuna para informar aos interessados quão críveis e próprios são os resultados das avaliações que lhes dizem respeito.

Em verdade, a meta-avaliação traduz um conhecimento construído a partir de olhar(es) interno(s) ou externo(s) (FURTADO; LAPERRIÈRE, 2012) que, incidindo sobre o processo avaliativo, aprecia-o, segundo

distintas possibilidades metodológicas, que podem incluir, dentre outras práticas, análise de conteúdo, síntese de categorias, críticas de profissionais aos relatórios, reanálise dos dados originais, coleta de novas informações, modelos conceituais da área específica do programa (HEDLER, 2007). Tal diversidade de concepções, metodologias e procedimentos, por sua vez, evidencia que a literatura especializada ainda encontrou "resposta direta à questão das etapas e técnicas necessárias à realização de um estudo meta- avaliativo" (HEDLER, 2007, p. 59). Entretanto, qualquer que seja a proposta adotada, a essência do processo permanece:

> a meta-avaliação se caracteriza por ter a avaliação como objeto de interesse. É de natureza qualitativa e pretende estabelecer um julgamento de valor [...] com base em informações existentes ou construídas sobre uma determinada avaliação [...] para subsidiar eventuais tomadas de decisão (FURTADO; LAPERRIÈRE, 2012, p. 696).

Em uma das elaborações em relação ao tema, Stufflebeam (2001, p. 185) assim se expressou:

> Meta-avaliação é o processo de delinear, obter e aplicar informação descritiva e de julgamento – sobre utilidade, viabilidade, adequação e precisão de uma avaliação e sua natureza sistemática, competente conduta, integridade/ honestidade, respeitabilidade e responsabilidade social – para orientar a avaliação e divulgar publicamente pontos fortes e fracos.

Nas palavras de Cotera e Matamoros (2011), a questão central da meta-avaliação é avaliar o nível de qualidade de um estudo avaliativo e a suficiência de sua proposta. Com isso, favorece não só a identificação de suas fortalezas e fragilidades, como também ratifica, ou não, os princípios que suportam a política avaliativa em que a avaliação se vincula(ou).

Naturalmente, definições diferentes supõem concepções diferentes e, por conseguinte, encaminhamentos metodológicos particulares, capazes de atender às distintas perspectivas filosóficas dos avaliadores. Assim sendo, é de se esperar que diferenciadas óticas impliquem benefícios diversos. Respeitadas as afinidades teóricas dos autores, à guisa de ilustração, vale citar, nesse sentido, as contribuições de Patton (1977), Furtado e Laperrière (2012, p. 697), e de Berends e Roberts (2003 apud ELLIOT, 2011, p. 943). Para o primeiro, processos meta-avaliativos trazem à tona novas informações acerca das potencialidades e limitações das avaliações realizadas, concorrendo para sua maior credibilidade e contextualização dos resultados alcançados. De acordo com os segundos autores, fazem emergir questões sobre aquilo que ocorreu ou que está ocorrendo em cada avaliação efetuada. Também informam sobre a qualidade dos resultados da avaliação e, ainda, se são dignos, ou não, de serem utilizados. Por fim, Furtado e Laperrière (2012) ressaltam que as meta-avaliações noticiam se o processo avaliativo "lançou mão de princípios e padrões estabelecidos, aumentando o trânsito entre a ação e a reflexão." Na visão deles, possibilitam também

> a verificação da aplicação de um código de comportamento adequado durante todo o estudo, ou seja, a ética adotada pelos avaliadores, se ela existe e como foi praticada. {...} [Além disso, sendo] a meta-avaliação [...] uma prática de reflexão sobre todos os procedimentos utilizados na avaliação, [...] [dá] oportunidade à incorporação de novos conhecimentos por parte não só dos meta-avaliadores, como também dos avaliadores, quando tomam ciência da análise realizada.

Cotera e Matamoros (2011) enriquecem a abordagem do tema discorrendo sobre critérios que pautam os sistemas classificatórios das meta-avaliações: papel que desempenham, denominando-as meta-avaliações formativas ou somativas; conteúdo ou fase que avalia, nomeando-as meta-avaliações de desenho, de processo ou de resultado; momento em que ocorrem, meta-avaliações *ex-ante* (se incidem anteriormente à implementação da avaliação) e *ex-post fato* (se acontecem no curso do processo avaliativo ou imediatamente após a sua finalização); agente avaliador, meta-avaliação interna (caso os meta-avaliadores também tenham participado da avaliação) ou externa (quando são alheios a ela).

No caso, a presente meta-avaliação caracteriza-se como somativa, de resultado, *ex-post fato* e externa. Sua abordagem metodológica é clássica: corresponde aos Critérios Fundamentais, tendo sido formulada por Davidson (2005 apud ELLIOT, 2011) e apresentada na seção referente à metodologia. Com isso, à caracterização do estudo acresce-se outra informação: a meta-avaliação se serviu de critérios pré-existentes e consagrados, ou seja, critérios que possuem validade conhecida e assegurada, dispensando questionamentos em torno de sua qualificação.

2 I SOBRE O OBJETO DA META-AVALIAÇÃO

Trata-se do estudo intitulado Avaliação da Aprendizagem de Conceitos Lógico-Matemáticos com Utilização de Jogo Digital, desenvolvida por Souza (2015), no âmbito do curso do Mestrado Profissional em Avaliação da Fundação Cesgranrio.

A avaliação foi organizada em seis partes. Na parte introdutória, apresenta o avanço das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na sociedade contemporânea e seu impacto em todas as dimensões da vida cotidiana. A escola, por conseguinte, não fica alheia a essas influências tecnológicas: "o mundo está em constante renovação e a presença das TIC,no contexto escolar, transforma o ambiente educacional e, mais profundamente, enriquece o pensamento e a visão de mundo" (SOUZA, 2015, p. 11).

Em seguida, menciona o objetivo, a questão avaliativa, a justificativa do estudo, sendo o primeiro "avaliar a contribuição de um jogo digital [*Zombinis em o resgate na montanha*] na aprendizagem de conceitos lógico-matemáticos utilizados no desenvolvimento de conteúdos escolares." (SOUZA, 2015, p. 13). A segunda tão somente indaga: "Até que ponto as atividades propostas pelo jogo digital *Zombinis* em *O Resgate na Montanha* possibilitam

a aprendizagem de conceitos fundamentais ao desenvolvimento do raciocínio lógico? (SOUZA, 2015, p. 13). E a terceira, a justificativa, além de destacar a carência de estudos acadêmicos situados na interface Tecnologias da Informação e Comunicação-Educação Infantil, ainda chama a atenção para a contribuição pedagógica advinda da vivência no jogo escolhido, quando a criança seria estimulada a desenvolver conceitos lógico-matemáticos fundamentais a diversos campos de conhecimento, a exemplo da Biologia, Física. Química, História, Informática (SOUZA, 2015).

A discussão em torno das potencialidades e contribuições pedagógicas dos Jogos Digitais na Educação é fundamentada nos pensamentos de Pierre Lévy, Marc Prensky, Jean Paul Gee e Lynn Alves, dentre outros. Antecedem o estudo das contribuições dos estudiosos algumas reflexões, sinalizando que

> A disseminação e o crescente acesso a tecnologias digitais têm mudado os contextos escolares e o perfil do aprendiz, provocando necessidade de mudanças no processo ensino-aprendizagem, o que inclui a adoção de propostas educacionais centradas no aluno (SOUZA, 2915, p. 15).

Na avaliação, realizada alguns educadores e pensadores, tais como Edouard Claparède, Johan Huizinga e Jean Piaget, são referidos como integrantes do grupo de pioneiros a identificar a importância da inserção dos jogos no ambiente escolar. Os conceitos lógico-matemáticos presentes no jogo *Zombinis - O Resgate na Montanha* - são evidenciados a partir da teoria construtivista de Jean Piaget, mais conhecida como Epistemologia Genética. Segundo o autor,

> Qualquer que seja o tipo de conhecimento, [...] este deriva-se de uma construção mental resultante da ação do sujeito sobre o mundo. O conhecimento não é inerente ao objeto nem está inato na cabeça do sujeito; [...]. é elaborado pelo sujeito ao refletir sobre o mundo. O pensamento lógico-matemático é uma construção mental que se processa em diversos estágios de abstração (SOUZA, 2015, p. 21).

Na sequência, o estudo avaliativo explicita o objetivo do jogo – “auxiliar as crianças a desenvolver e aplicar as habilidades do raciocínio lógico, conferindo-lhes liberdade para explorar cada problema e encontrar a solução” (SOUZA, 2015, p. 25) – e declara que seus conceitos lógico-matemáticos estão compatíveis com a faixa de desenvolvimento cognitivo em que se situam os sujeitos envolvidos, o estágio pré-operatório que ocorre entre 2 a 7 anos de idade. O *Zombinis* é descrito, com minúcia, em seus nove desafios:

> O jogo é uma proposta de aventura que visa explorar e desenvolver conceitos lógico-matemáticos. Com tal, parte do princípio de que o raciocínio, o discernimento e a clareza da percepção são elementos importantes na aprendizagem. O jogo desenvolve um sistema de recompensas, sem exigir da criança rapidez para resolver as situações-problema apresentadas nas suas diversas trilhas de aprendizagem. Tem como propósito permitir à criança escolher o foco de sua atenção, a dificuldade do desafio e a sua própria definição de sucesso ao manipular as situações enfrentadas. Assim, a criança inventa as suas estratégias para compreender as situações e avançar em sua

> aprendizagem (SOUZA, 2015, p. 24).

Somente três desses desafios – O Rio da Tartauga, Os Canos de Paloo e A Sala dos Espelhos – foram avaliados quanto à promoção da aprendizagem de conceitos lógico-matemáticos, a saber: comparação, classificação, observação, sequenciação, elaboração e experimentação de hipótese.

A metodologia inicia-se citando o contexto do estudo – escola localizada na zona oeste da cidade do Rio de Janeiro – e os seus sujeitos: 15 crianças de cinco a seis anos de idade, matriculadas em turma de Educação Infantil. A abordagem escolhida foi a centrada em objetivos, tendo como traço distintivo "o fato de que os propósitos de uma atividade são especificados e, nesse caso, a avaliação concentra-se na medida em que esses propósitos foram alcançados" (WORTHEN; SANDERS; FITZPATRICK, 2004, p. 29).

Em continuação, o estudo expôs os objetivos operacionais visados, nas etapas preparatórias, para a aplicação do jogo, e naquela voltada para o desenvolvimento da atividade com o jogo propriamente dito. A formulação de tais objetivos pautou-se em Mager (1962 apud VILARINHO, 1989), para quem devem ser considerados três pontos básicos: "ação, condição e critério. A ação é a atividade que o aprendiz deverá realizar; a condição é o contexto no qual se dará a ação; e o critério é o padrão de rendimento esperado ao final da tarefa." (SOUZA, 2015, p. 30).

Com base em tais objetivos, foram elaborados o quadro dos critérios avaliativos, constituído por duas dimensões (Atividade na sala de aula: fase preparatória e Atividade no laboratório de informática: aplicação do jogo digital), e os indicadores referentes às atividades pedagógicas promovidas naqueles dois ambientes. Também foram definidos os três padrões de julgamento (muito bom, bom e insatisfatório) a serem considerados durante a avaliação do desempenho da aprendizagem das crianças. Assim,

> Com base nos indicadores e padrões de desempenho esperados, foi possível construir os instrumentos de avaliação utilizados pela avaliadora durante o desenvolvimento do estudo com as crianças, tanto na sala de aula quanto no laboratório de informática (SOUZA, 2015, p. 34).

A apresentação dos resultados mostra-se segmentada segundo as fases cumpridas. Na primeira atividade da fase preparatória, cuja avaliação foi realizada individualmente, todos os alunos conseguiram operar no nível do conceito lógico matemático de classificação. A segunda atividade, avaliada a partir do trabalho em grupo, desenvolvido por duplas ou trios e envolvendo a operação de sequenciar, foi plenamente executada por oito alunos, num universo de 12 participantes. No que tange ao conceito de comparar, "nenhum aluno conseguiu encontrar as sete diferenças [entre duas figuras], o que sugere a dificuldade da tarefa para o grupo (SOUZA, 2015, p. 37)".

A fase do jogo digital foi dividida em quatro partes: uma aula expositiva e três outras a respeito dos desafios propostos no jogo digital. A exposição incluiu a apresentação de história fantasiosa em que os *Zombinis* precisavam da ajuda das crianças para serem

resgatados de uma caverna, onde estavam aprisionados, após um temporal. A partir da apreciação de figuras, os alunos perceberam que os *Zombinis* tinham entre si semelhanças e diferenças quanto ao tamanho dos personagens, aos olhos, cabelos, pés e à cor do nariz.

A atividade *online* promovida permitiu a criação de personagens *Zombinis* pelos alunos. A aula pretendeu estimular a curiosidade infantil e oportunizar o levantamento de hipóteses. A aula seguinte, que se ocupou da atividade Rio da Tartaruga, teve a seguinte instrução: as crianças deveriam observar as pistas situadas no tronco da árvore e seguir a ordem de classificação indicada, de modo que colocassem, no mínimo, 14 *Zombinis* sobre os cascos das tartarugas (SOUZA, 2015). Essa oportunidade de aprendizagem permitiu a concretização das operações lógico-matemáticas de observar, comparar, classificar, sequenciar e hipotetizar. Na atividade Canos de Paloo,

> A principal orientação era combinar pares de *Zombinis* que tivessem as mesmas características , conforme indicado na etiqueta do cano, para permitir a passagem da água. Desta forma, os alunos deveriam inserir corretamente, no mínimo, 14 *Zombinis* no sistema de canos de água, de acordo com o atributo solicitado (SOUZA, 2015, p. 40).

Oito alunos, em 13, conseguiram inserir corretamente, pelo menos, 14 *Zombinis* no sistema de cano de água, cumprindo assim os seguintes conceitos previstos: observar, comparar e classificar os personagens, conforme as características comuns. Em Sala dos Espelhos,

> Os alunos, observando um conjunto de seis espelhos, cada um deles contendo uma criatura *Fleen*, tinham que encontrar o personagem verdadeiro, atirando bo;as de canhão nos espelhos. [...] Era esperado que, dados os seis conjuntos de espelhos, as crianças encontrassem, no mínimo, quatro personagens verdadeiros antes de esgotarem o estoque de 12 bolas de canhão (SOUZA, 2015, p. 42).

A atividade objetivou o conceito da hipotetização-dedução, porém nenhum grupo conseguiu desenvolvê-lo dada a sua complexidade para o nível de desenvolvimento infantil.

3 I SOBRE A METODOLOGIA ADOTADA

A metodologia de Davidson – Critérios Fundamentais - (2005 apud ELLIOT, 2011) sustentou o desenvolvimento dessa meta-avaliação e dela foram considerados quatro dos cinco critérios de qualidade: validade, utilidade, conduta, credibilidade. O quinto deles, custos, foi preterido porque o estudo avaliativo foi autofinanciado pela própria avaliadora. O conjunto desses critérios é entendido no âmbito da seguinte perspectiva:

> Avaliações devem produzir conclusões válidas e justificáveis; ser úteis ao cliente e a outros públicos; ser conduzidas de uma maneira ética, legal, profissional e apropriada; ser digna de crédito para os públicos relevantes; e ser tão econômica, rápida e não obstrutiva quanto possível (DAVIDSON, 2005 apud ELLIOT, 20012, p. 947).

Em seguida, são descritos os quatro critérios considerados no estudo: validade, utilidade, conduta e credibilidade.

Validade. Estabelece-se quando as conclusões da avaliação mostram congruência entre si, justificando-se mutuamente. Davidson (2005 apud ELLIOT, 2011) considera que as conclusões de um estudo avaliativo resultam não somente dos fatos e dados coletados, mas ainda do conjunto de valores que lhes são atribuídos na ocasião de seu julgamento. Por conta disso, recomenda que a meta-avaliação se certifique das fontes de dados utilizadas pelo avaliador bem como atente às associações feitas entre fatos e valores, visando constatar quanto as conclusões se justificam. Davidson (2005 apud ELLIOT, 2011) ainda recomenda ao meta-avaliador verificar se o processo avaliativo:

> Cobre todas as fontes relevantes de valor […].
>
> Cobre compreensivamente processo, resultado e custo.
>
> Não inclui critérios irrelevantes ou ilícitos.
>
> Inclui análises qualitativas e quantitativas que são apropriadas aos dados coletados.
>
> Estabelece claramente como os dados são interpretados.
>
> Explicita com clareza as conclusões avaliativas [...].
>
> Inclui recomendações válidas, se existirem, ou seja, há base suficiente para propô-las e permite reconhecer que elas vão funcionar se forem implementadas).

Utilidade. Diz respeito a quão bem os resultados da avaliação satisfazem aos interessados, assumindo relevância frente às suas questões e/ou necessidades de tomadas de decisão. Nas palavras de Elliot (2011, p. 948), "Quanto mais os resultados [da avaliação] forem usados pelos participantes ou pelos interessados, [...] mais forte se torna o atendimento ao critério da utilidade." A utilidade também dose ocupa da disponibilidade e da clareza de comunicação dos resultados, envolvendo, pois, atenção à adequação da linguagem e dos canais de comunicação.

Conduta. Perpassa a ética, a legalidade, o profissionalismo, o respeito à cultura e a não interrupção do fluxo avaliativo, sem que realmente ocorra necessidade. Ao referir-se a cada um desses padrões, Elliot (2011, p. 948) pondera:

> Os padrões legais são aqueles relacionados à legislação local, nacional e até internacional, dependendo do objeto avaliado. Os padrões éticos preconizam não colocar os participantes em perigo, obter seu consentimento para participar da avaliação e proteger a confidencialidade dos dados e das informações obtidos. Padrões profissionais, [são] dirigidos ao avaliadores, como o que se espera do seu desempenho profissional [...]. Já os padrões culturais dizem respeito a determinadas culturas ou grupos étnicos e adquirem nuances particulares em cada local.

Credibilidade. Tem a ver com a atribuição de crédito à avaliação e aos demais elementos nela considerados, como fontes consultadas e resultados obtidos. Depende de, ao

menos, três elementos relativos ao avaliador: (a) familiaridade com o contexto da avaliação, implicando amplo conhecimento do projeto, programa ou atividade avaliada, desde a sua estrutura, organização, normas internas e grupo afetado; (b) posse de atributos pessoais que lhe assegurem, no trato da avaliação, independência, imparcialidade e inexistência de conflito de interesse; (c) domínio das competências profissionais da especialidade e conhecimento justo acerca do objeto da avaliação (DAVIDSON, 2005 apud ELLIOT, 2011).

4 I SOBRE OS RESULTADOS

O conjunto de aspectos referentes aos quatro Critérios Fundamentais orientaram a organização dos resultados do estudo meta-avaliativo, que passam a ser apresentados.

Quanto à Validade. O processo avaliativo, objeto da presente meta-avaliação, selecionou e fez uso apropriado de fonte de grande relevância, para avaliar a aprendizagem de conceitos lógico-matemáticos, com a utilização de jogo digital - a Epistemologia Genética de Jean Piaget. O desenvolvimento do estudo contemplou todas as etapas do processo avaliativo: problematização, objetivo, justificativa e questão avaliativa; breve revisão de literatura, evidenciando a pertinência da incorporação das TIC e, especialmente, dos jogos digitais na escola; conceitos lógico-matemáticos, considerando a construção da aprendizagem na perspectiva piagetiana e o seu desenvolvimento, a partir do jogo selecionado propriamente; elementos metodológicos procedentes (contexto e sujeitos do estudo, classificação da abordagem avaliativa adotada, definição das categorias, dos indicadores e padrões de julgamento); resultados da avaliação, segundo as duas fases (preparatória e do jogo digital), apresentados a partir de análises adequadas à natureza dos dados; conclusões, que se mostraram consistentes e congruentes à totalidade da proposta avaliativa.

Quanto à Utilidade. Os resultados obtidos respondem às inquietações didático-pedagógicas dos interessados, os profissionais de educação dedicados à Educação Infantil, bem como os que têm expectativas acerca desse nível de ensino. A avaliação evidenciou a possibilidade de o programa educativo *Zombinis em O Resgate na Montanha*, a partir dos conceitos lógico-matemáticos trabalhados, contribuir para a aquisição de diversos saberes escolares e não escolares que demandam pelas mesmas estruturas cognitivas.

Ainda no que tange ao critério fundamental da utilidade, importa ressaltar a clareza redacional do texto acadêmico meta-avaliado, em toda a sua extensão. Essa característica, no trato da língua materna, agregada a outros atributos de mesma natureza, a exemplo da simplicidade, logicidade ideativa, coerência e coesão textuais, facilitam a apropriação dos conteúdos abordados pelo leitor interessado, que tem acesso à obra, disponível nos formatos impresso e digital.

Quanto à Conduta. No campo da Avaliação, o critério conduta está associado à ética, à legalidade, ao bem-estar dos envolvidos no estudo avaliativo e àqueles afetados

por seus resultados. Considerando que “Ética é um conjunto de princípios e valores que guiam e orientam as relações humanas. [E que] Esses princípios devem ter características universais [porque] precisam ser válidos para todas as pessoas e para sempre” (SOUZA; RODRIGUES, 1994, p. 12), pode-se considerar que o estudo foi ético, enfatizando os seguintes destaques: (a) considerou as necessidades de aprendizagem das crianças em respeito ao estágio de desenvolvimento cognitivo próprio a sua faixa etária; (b) assumiu a responsabilidade docente propondo atividade pedagógica relevante para o aluno que faz a Educação Infantil; (c) avaliou individual e coletivamente a prontidão do aluno para desenvolver as habilidades cognitivas focadas no jogo; cuidou do bem-estar dos envolvidos e dos afetados pelos resultados (especialmente, alunos e professores), promovendo ambiente pedagógico sensível e respeitoso às suas necessidades e possibilidades.

Do ponto de vista legal, o estudo encontra-se em conformidade ao que preconiza a educação nesse nível:

> a criança deve ser respeitada como um ser que precisa, tanto do atendimento apropriado, como de práticas que possibilitem o desenvolvimento de sua curiosidade e imaginação aliada à sua forma privilegiada de conhecer o mundo, por meio do brincar, fazendo uso das múltiplas linguagens e experiências que uma instituição pensada para a criança pode oferecer (AVILA, 2014, p.3).

Quanto à Credibilidade. O critério em questão decorre do mérito do estudo, isto é, de suas qualidades intrínsecas, já fartamente apreciadas, mas também da qualificação da avaliadora. No que tange à sua familiaridade com o contexto da avaliação, foi notório o pleno conhecimento dele, pois, na escola, atuava como docente de alunos da Educação Infantil. Por conseguinte, dentre outras, conhecia, o grupo de crianças, as suas possibilidades e dificuldades, os seus espaços e tempos de aprendizagem, seus jogos e brincadeiras. Considerados os atributos pessoais e profissionais, a avaliadora mostrou autonomia na condução da prática pedagógica proposta, bem como sólido conhecimento em torno do objeto de avaliação, além de competência profissional para conduzir, com êxito, o estudo avaliativo.

REFERÊNCIAS

AVILA, Maéle Cardoso. **Educação infantil e legislação: um convite ao diálogo. X Encontro Regional Sul da Associação Nacional de Pesquisadores em Educação**. Florianópolis, out. 2014.

COTERA, Aurora Trujillo; MATAMOROS, Ariana Acón. **Propuesta para implementar la Metaevaluación en la Escuela de Ciencias de la Educación de la Universidad Estatal a Distancia.** *Revista Calidad en la Educación Superior Programa de Autoevaluación Académica*. Costa Rica, v. II, n. 2, nov., 2011.

ELLIOT, Lígia Gomes**. Meta-avaliação: das abordagens às possibilidades de aplicação**. Ensaio: aval. pol. públ. educ., Rio de Janeiro, v. 19, n. 73, out./dez. 2011.

FURTADO, Juarez Pereira; LAPERRIÈRE, Hélène. **Parâmetros e paradigmas em meta-avaliação: uma revisão exploratória e reflexiva**. *Ciência & Saúde Coletiva*, Rio de Janeiro, v. 17, n. 3, mar. 2012.

HEDLER, Helga Cristina. **Meta-avaliação das auditorias de Natureza Operacional do Tribunal de Contas da União: um estudo sobre auditorias de programas sociais.** 260 f. 2007. Tese (Programa de Pós-Graduação em Psicologia Social, do Trabalho e das Organizações)-Universidade de Brasília. Brasília, DF, 2007.

SOUZA, Herbert de; RODRIGUES, Carla. ***Ética e Cidadania***. São Paulo: Moderna, 1994.

SOUZA, Ludmila Bianca Schulz de. **Avaliação da aprendizagem de conceitos lógico-matemáticos com utilização de jogo digital**. 52 f. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Avaliação)-Fundação Cesgranrio, Rio de Janeiro, 2015.

PATTON, MQ. ***Utilization-focused evaluation***. Thousand Oaks: Sage, 1977.

STUFFLEBEAM, D. L. **Metaevaluation Imperative**. *American Journal of Evaluation*, Thousands Oaks, v. 22, n. 2, p. 183-209, 2001.

VILARINHO, lucía Regina Goulart. **Didática: temas selecionados**. Rio de Janeiro: LTC, 1989.

WORTHEN, Blaine R.; SANDERS, James L.; FITZPATRICK, Jordy R. ***Avaliação de programas*: concepções e práticas**. São Paulo: Ed. Gente, 2004.

CAPÍTULO 2

VIVÊNCIAS DE OFICINA PEDAGÓGICA: A GINCANA E O MATEMATIZAR POR MEIO DE DIFERENTES METODOLOGIAS ATIVAS

Data de aceite: 02/05/2022

Raimundo Santos Filho

Patrícia Barbosa dos Santos

Vinicius Christian Pinho Correia

Américo Junior Nunes da Silva

RESUMO: Este texto objetiva relatar as experiências vivenciadas em uma oficina pedagógica, ocorrida virtualmente durante a pandemia da COVID-19, com estudantes do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Campo Formoso, estado da Bahia. Nesse sentido, para a vivência da oficina, realizamos encontros utilizando metodologias ativas, tendo como foco a Gamificação para o ensino remoto; e com isso, possibilitando momentos potencialmente lúdicos por meio de inúmeros recursos digitais, jogos e dinâmicas interativas. Essa atividade extensionista vincula-se ao Laboratório de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática (LEPEM/CNPq) e foi financiada pelo Programa Afirmativa, da Universidade do Estado da Bahia. Portanto, partindo das vivências da oficina, percebemos que a proposta Gamificada pode ser uma alternativa nos processos de ensino e aprendizagem, quando realizada as devidas adequações; além disso, percebemos que os jogos contribuíram na construção do conhecimento matemático dos estudantes.

PALAVRAS-CHAVE: Metodologias ativas; Gamificação; Pandemia; Educação Matemática.

PEDAGOGICAL WORKSHOP EXPERIENCES: THE GAUNCH AND MATHEMATIZING THROUGH DIFFERENT ACTIVE METHODOLOGIES

ABSTRACT: This text aims to report the experiences lived in a pedagogical workshop, which took place virtually during the COVID-19 pandemic, with students from the 6th and 7th year of Elementary School at a public school in the municipality of Campo Formoso, state of Bahia. In this sense, for the experience of the workshop, we held meetings using active methodologies, focusing on Gamification for remote teaching; and with that, enabling potentially playful moments through countless digital resources, games and interactive dynamics. This extension activity is linked to the Laboratory of Study and Research in Mathematics Education (LEPEM/CNPq) and was financed by the Affirmative Program of the State University of Bahia. Therefore, based on the experiences of the workshop, we realized that the Gamified proposal can be an alternative in the teaching and learning processes, when appropriate adjustments are made; in addition, we realized that the games contributed to the construction of students' mathematical knowledge.

KEYWORDS: Active methodologies; Gamification; Pandemic; Mathematics Education.

INTRODUÇÃO

Os contextos de presencialidade, durante o período pandêmico, sofreram grandes

adaptações, sobretudo tendo em vista as orientações da Organização Mundial da Saúde (OMS). Durante esse "novo normal", revelado pela necessidade de distanciamento social, muitas medidas foram tomadas para amenizar os grandes impactos que a Covid-19 trouxe ao planeta. Essas alterações na sociedade levaram ao distanciamento social e, com isso, as atividades acadêmicas e escolares se readequarem por aulas remotas, por meio de ferramentas digitais.

Porém, como fomos surpreendidos pela pandemia, observa-se que muitas escolas, docentes e estudantes não estavam preparados para trabalharem de uma forma diferente do modelo presencial, não havia equipamentos e internet de qualidade para assegurar esse novo modelo de interação. Essas aulas foram um grande desafio para muitos profissionais de educação que desconheciam muitos dos dispositivos tecnológicos e metodologias trabalhadas durante esse período e para os estudantes por muitos não possuírem equipamentos e internet. Observamos durante os últimos dois anos, que tampouco foram pensadas alternativas ou políticas públicas que assegurassem o acesso à escola, que acontecia virtualmente, como direito. O cenário foi de exclusão para muitos estudantes brasileiros e os impactos dessa realidade reverberarão pelos próximos anos.

Deste modo, diante do tamanho do desafio desenhado para os movimentos de ensinar e aprender, e pensando em apresentar diferentes metodologias e dispositivos pedagógicos, com o intuito de amenizar os efeitos das dificuldades com o trabalho remoto, decidimos estruturar para alunos de escola pública uma oficina que, nessa virtualidade, pensasse uma intervenção didático-pedagógica a partir de metodologias ativas, mostrando outras formas de aprender e ensinar Matemática. Essa proposta nasce, sobretudo, como tentativa de ressignificar as percepções dos estudantes quanto ao ensinar e aprender Matemática, algo ainda mais estigmatizado como "bicho de sete cabeças" durante a pandemia.

Diante disso, optamos em vivenciar uma oficina gamificada. E, nessa direção, quando se fala de Gamificação, compreendemos como alternativa potencialmente lúdica e que pode contribuir com a formação dos estudantes; e por meio dela buscamos levar um modelo de aula diferente das "aulas virtuais cansativas e desmotivadoras", algo que se aproximasse mais de atividades dinâmicas e prazerosas. Assim, queremos possibilitar ao estudante o ressignificar de seu papel, passando a assumir uma postura protagonista de seu conhecimento.

As atividades foram ofertadas aos alunos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública localizada no município de Campo Formoso e desenvolvidas a partir da construção de uma oficina pedagógica potencialmente lúdica, com uso de diferentes ferramentas digitais para promover aos estudantes um ensino e aprendizagem dinâmica. Ambicionávamos permitir aos estudantes participantes perceberem que existem modelos diferentes do tradicional "quadro e exercícios", onde é possível aprender matemática de diferentes maneiras, sobretudo a partir do jogo, por exemplo.

Esta oficina vincula-se ao Laboratório de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (LEPEM/CNPq), espaço de formação pertencente ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia, Campus VII; e contou com financiamento do programa Afirmativa, a partir da aprovação do projeto em Edital específico.

A formação promovida pelo LEPEM e suas iniciativas vão ao encontro da perspectiva de formação apresentada por Pimenta e Lima (2006), sobretudo por compreender a natureza subjetiva e singular de cada realidade escolar, entendendo o papel de cada estudante, futuro professor de Matemática, na construção de propostas e as implicações desse movimento para a constituição da identidade docente. E nesse sentido, objetivamos com este relato de experiência descrever as práticas pedagógicas desenvolvidas durante a oficina; no qual, apresentamos o conteúdo das quatro operações fundamentais.

Este relato de experiência, em busca de melhor ser entendido, organizou-se textualmente da seguinte forma: a) introdução, onde apresentamos à temática, os objetivos e algumas considerações iniciais; b) percurso metodológico, onde consta todo o processo da construção da oficina, mostrando os elementos metodológicos usados para atender a necessidade do público-alvo; c) vivência da oficina, que apresenta os itinerários da oficina pedagógica; d) considerações finais, onde apresentamos os resultados da atividade.

PERCURSO METODOLÓGICO: PENSANDO A OFICINA

Pensar e planejar aulas para o ensino remoto é diferente de quando se trata das aulas presenciais, sobretudo se considerarmos que o tempo de tela pode ser um problema para a promoção de aprendizagens, por exemplo. Na busca por uma aprendizagem potencialmente lúdica, idealizamos trabalhar, numa oficina pedagógica, as quatro operações matemáticas a partir do uso de jogos, Gamificação, videoaulas, da história da matemática, paródias e outras metodologias.

Pensamos para a proposta de nossa oficina pedagógica a utilização da Gamificação da Educação, com o intuito de proporciona aos estudantes um ambiente de sala de aula como o universo *game*; além de usar o jogo como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Fardo (2013, p. 63), a quem utilizamos para respaldar teoricamente a construção da proposta,

> A Gamificação pode promover a aprendizagem devido muitos de seus elementos serem baseados em técnicas motivacionais e professores veem usando há muito tempo. Características como distribuir pontuações para determinadas atividades e encorajar a colaboração em projetos são as metas de muitos planos pedagógicos. (FARDO, 2013, p. 63)

Nesse sentido, quando pensamos nas atividades que seriam desenvolvidas ao decorrer da Gincana, a partir das diferentes metodologias, refletimos e buscamos propostas

potencialmente lúdicas. A ludicidade, como assevera Luckesi (2014, p.14), trata-se de “um estado interno do sujeito”, ou seja, cabendo somente aos estudantes que vivenciam definir se algo é ou não lúdico.

Com isso, a gincana aconteceu em dez encontros, sendo três semanalmente. Os encontros foram divididos em dias alternados para não tornar cansativa a oficina. As atividades foram divididas em apresentação entre alunos e monitores, trabalhando as quatro operações matemáticas (adição, subtração, divisão e multiplicação). Assim, como dito anteriormente, utilizamos também os jogos para vivenciar e tornar o ensino e aprendizagem mais dinâmico e espontâneo e outras propostas para dinamizar o espaço virtual de sala de aula.

Antes de iniciarmos a oficina fomos à escola e solicitamos a autorização para realizar a atividade naquele espaço. Com o aceite da Direção, fomos direcionados virtualmente a turma do 6º ano da escola. Fizemos o convite aos alunos e percebemos que ao falar em “oficina de Matemática” muitos não demonstraram interesse em participar. Foi perceptível, com o convite, que eles achavam que a oficina proposta seria mais uma aula de Matemática, como as que eles estavam tendo. Decidimos, portanto, fazer o convite também para outra turma, do sétimo ano.

Os alunos que aceitaram participar da oficina foram divididos em duas equipes e cada equipe recebeu um monitor, que ficou responsável em orientar e ajudar os estudantes. Vale destacar que os monitores foram os autores deste texto. Durante o processo de vivência da oficina, buscávamos não interferir na construção das ideias matemáticas durante as atividades; fazíamos mais o papel de mediar e provocar, fazendo perguntas, indagando sobre os erros e esclarecendo dúvidas.

Além disso, antes do início da oficina, aplicamos um questionário diagnóstico para conhecer melhor os participantes e perceber as percepções deles quanto a Matemática e os conhecimentos relacionados às operações fundamentais, conteúdos que trabalharíamos.

VIVÊNCIAS DA OFICINA PEDAGÓGICA: A GINCANA E O MATEMATIZAR POR MEIO DE DIFERENTES METODOLOGIAS

A nossa proposta de oficina pedagógica delineou-se a partir das metodologias ativas, sobretudo da Gamificação da Educação. Nesse sentido, concordando com o que apresenta Schlemmer (2014), partimos de uma perspectiva epistemológica de gamificação, na qual a função está voltada para a cooperação e coletividade entre os estudantes, desafiando-os com missões e tarefas, [algo que objetivávamos realizar no percurso da gincana]. Queríamos possibilitar aos participantes descobrir uma Matemática diferente da vivenciada dentro da sala de aula remotamente.

Então, partindo desse desafio, buscamos ressignificar algumas práticas de ensino e aprendizagem da Matemática, sobretudo pensando em enfrentar algumas problemáticas

desencadeadas pelo contexto pandêmico, muitas delas que impossibilita uma aprendizagem com significado para os estudantes e um reforçar da imagem da Matemática como sendo difícil e descontextualizada das diversas situações cotidianas. Utilizando a teoria da Gamificação, Cepellos, Neidenbach e Pereira (2020) destacam que,

> [...] a Gamificação passa a representar mecanismos e ferramentas capazes de apresentar alternativas tangíveis para lidar com o aprendizado e para sugerir um novo modo de enxergar as relações de trabalho (VIANNA, VIANNA, MEDINA et al., 2014). A Gamificação coloca em jogo a questão da individualidade inserida no sistema de jogo, considerando os sentimentos das pessoas, suas inseguranças e as razões pelas quais querem ou não fazer algo, para então otimizar esses sentimentos, motivações e estimular o engajamento (CHOU, 2013). Consequentemente, a Gamificação tem se tornado um elemento cada vez mais popular em diversos ambientes, demonstrando resultados positivos na motivação de equipes no setor privado (VENTRICE, 2009). (CEPELLOS; NEIDENBACH; PEREIRA, 2020, p. 731-732).

Portanto, ainda partindo do que evidenciaram os autores anteriormente referenciados, entendemos que usar a Gamificação é usufruir dos elementos que os games têm como característica, como a tecnologia, autonomia, engajamento, desempenho, objetivo, interatividade, problema e regras.

Sendo assim, apresentaremos as experiências que tivemos a cada encontro da Gincana Matemática. Com isso, vale destacar que de modo geral, para realização desses encontros, utilizamos a plataforma do *Google Meet*. Dessa forma, criamos a sala e encaminhamos para as duas equipes através do aplicativo *WhatsApp*, espaço criado para integrar o grupo e permitiu a interação e comunicação entre as duas equipes.

APRESENTANDO A "GINCANA DAS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS: ENSINAR MATEMÁTICA POR MEIO DE METODOLOGIAS ATIVAS"

No primeiro encontro foi apresentada para os alunos a oficina e como aconteceriam os dez dias de encontro. Os monitores apresentaram-se e deram orientações de como poderia ajudar nas atividades que valeriam pontos na competição entre as duas equipes. Os participantes foram convidados a responder um formulário construído no *Google* formulários, para que conseguíssemos entender as particularidades de cada estudante, sobretudo no que tange os conhecimentos matemáticos.

Imagem 1 – Apresentação da Gincana

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Como o encontro teve como objetivo conhecer os participantes e apresentar os monitores e a oficina, ele não se estendeu por muito tempo. Pela expressão de surpresa e empolgação de alguns alunos, percebemos que eles se surpreenderam com a proposta, como se fosse algo muito diferente do que eles esperavam de aulas de Matemática. Devido a uma construção social negativa em relação à essa ciência, ainda mais por ser uma oficina pedagógica em formato remoto, entendemos que isso pode ter influenciado bastante na visão dos estudantes participantes e na negativa inicial de alguns.

O formulário aplicado com os participantes buscava entender as principais dificuldades com o trabalho com as quatro operações. Os alunos que responderam ao formulário revelaram que as suas maiores dificuldades estão em operações que envolvem multiplicação e divisão. Ao responderem os problemas matemáticos propostos, 33% erraram as de multiplicação e divisão; diferente dos problemas envolvendo adição e subtração, onde todos acertaram.

Também foi perguntado, nesse questionário, o que eles achavam da Matemática. Percebemos, nas respostas apresentadas, que alguns estudantes a percebem como parte do "[...] dia a dia, pois ela está presente em tudo que fazemos. A importância é que ela nos ajuda em momentos da vida, pois ela está em tudo que a gente faz". Outros alunos destacaram que é impossível "[...] viver sem ela!". Algumas respostas apresentadas nos levam a conjecturar que, embora sintam dificuldades em alguns processos matemáticos, a maioria dos alunos reconhece a Matemática em seu cotidiano e sua importância na vida.

Outra pergunta feita aos estudantes foi quanto às aulas remotas, o que estavam achando do ensino de Matemática nesse modelo. A grande maioria dos estudantes sinaliza grande dificuldade de aprender no modelo remoto e reconhecem o ensino presencial como "melhor que o virtual", além de que os "recursos como a internet acabam atrapalhando por interferência da rede".

Os problemas de acesso a equipamento e internet de qualidade, são fatos bastante comuns durante esse período pandêmico. O retorno das aulas, para alunos em vulnerabilidade econômica, escancarou ainda mais no Brasil uma realidade de desigualdades. Muitos alunos têm dificuldades ao acesso à internet, muitas vezes por morar em zonas rurais, ou a equipamentos. Isso interfere diretamente no ensino e aprendizagem.

REVISANDO APRENDIZADOS: OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

No segundo encontro, como planejado, explanamos as duas primeiras operações fundamentais: a adição e a subtração. Com isso, iniciamos nosso dia de atividades apresentando um pouco sobre a importância da aprendizagem matemática e dessas duas operações em especial, exemplificando-as com o cotidiano dos estudantes. Sendo assim, logo essas primeiras discussões, apresentamos uma videoaulas interativa e disponível na plataforma *YouTube*.

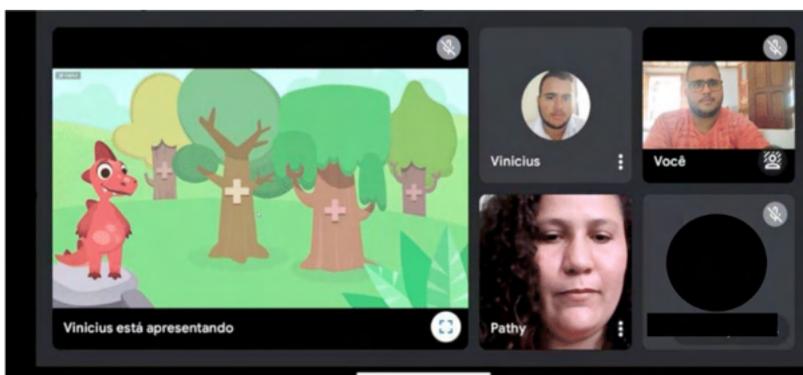



Imagem 2– Revisão das Operações de Adição e Subtração

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Aproveitamos a videoaula para promover discussões com os estudantes, sobretudo mobilizando algumas situações do vídeo com as vivências cotidianas deles. Nesse movimento, portanto, cabe-nos destacar o valorizar dos posicionamentos dos estudantes, que eram levados a pensar sobre as situações propostas, interagindo inclusive com os colegas. Nesse percurso, íamos fazendo perguntas para identificar eventuais dúvidas em relação ao conteúdo. Os participantes sinalizaram que gostaram da forma que introduzimos o conteúdo, com a utilização da animação.

Nesse sentido, percebemos que esse movimento realizado durante o encontro permitiu aos estudantes entenderem ainda mais os conceitos envoltos as operações de Adição e Subtração. Uma participante, durante a atividade, citou que nesse período pandêmico esse tipo de vídeo auxiliou bastante em sua aprendizagem, principalmente

quanto aos conteúdos matemáticos. Segundo ela, as animações faziam parte do repertório em suas buscas complementarem as aulas do professor da disciplina. Com isso, demos continuidade com o encontro apresentando alguns slides para apresentar as definições e algumas propriedades da adição e subtração.

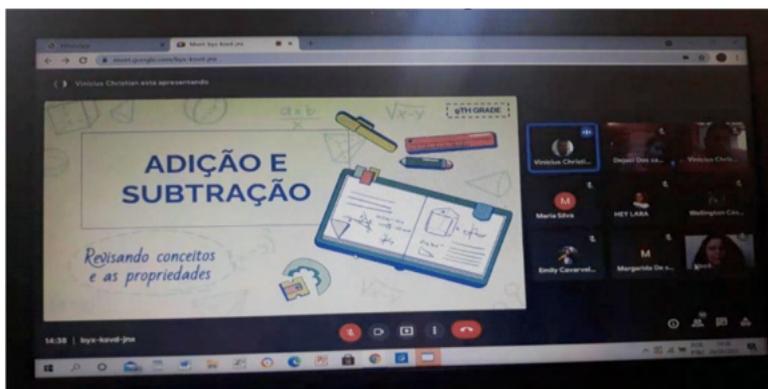



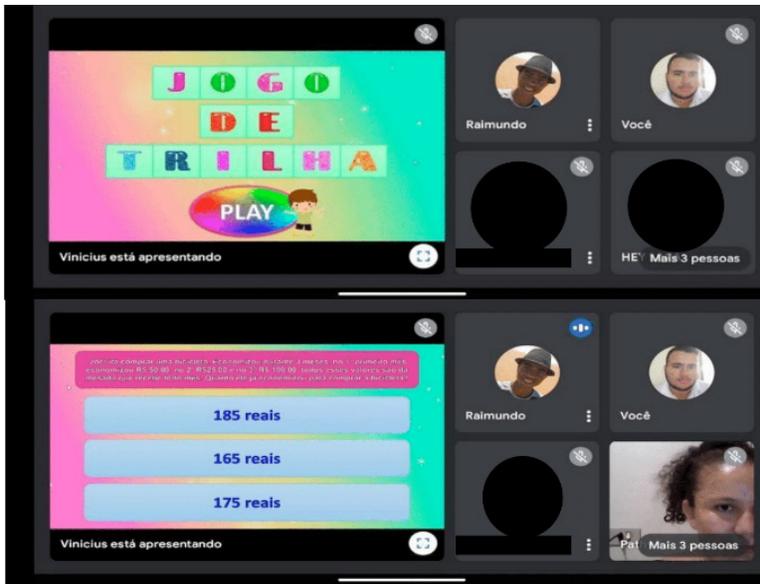
Imagem 3 - Slides usando na revisão das operações de adição e subtração

FONTE: Arquivos pessoais da equipe, 2021.

Por fim, conversamos com os estudantes para verificar se haviam dúvidas em relação às operações apresentadas. Os estudantes se manifestaram esclarecendo que não havia dúvidas. Finalizamos esse encontro falando um pouco sobre o proposto para a próxima atividade.

JOGO DA TRILHA DAS OPERAÇÕES

Nesse encontro, como planejamento anteriormente e com a orientação que tivemos em reunião no dia anterior, vivenciamos o “Jogo da Trilha”. De início fomos recebendo os participantes e cumprimentando-os, criando ainda mais afinidades. Iniciamos abordando sobre a dinâmica do jogo e suas regras. Cada acerto renderia 100 pontos à equipe.

Assim, demos início ao “Jogo da Trilha”. Fomos pedindo que os estudantes fizessem a leitura das questões contextualizadas de adição e subtração com os demais colegas, para depois em equipe solucionar o proposto, dentro de um tempo limite.

Imagens 4 e 5 – Jogo de Trilha das Operações

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Ademais, os jogos matemáticos são possibilidades de material didático a ser explorado no âmbito educacional; devido ao seu potencial lúdico e que propicia interesse nos estudantes em participar de atividades que trabalhem com a utilização deste recurso. Assim, corroborando ao que destaca Grando (2000, p. 26),

> Ao analisarmos os atributos e/ou características do jogo que pudessem justificar sua inserção em situações de ensino, evidencia-se que este representa uma atividade lúdica, que envolve o desejo e o interesse do jogador pela própria ação do jogo, e mais, envolve a competição e o desafio que motivam o jogador a conhecer seus limites e suas possibilidades de superação de tais limites, na busca da vitória, adquirindo confiança e coragem para se arriscar.

Dessa forma chegamos ao final do jogo com 400 pontos da equipe 1 e 500 pontos da equipe 2. Somente uma pergunta não foi respondida corretamente. A própria equipe percebeu, no momento da socialização, que a maneira que interpretaram a situação problema implicou no resultado final.

Algo interessante nessa proposta de jogo foi, para além da construção coletiva da resposta, ajudando os estudantes a aprenderem a trabalhar em equipe, foi o movimento de apresentar o caminho traçado para chegar à resposta. Durante esse momento, por exemplo, percebíamos a participação da outra equipe, sobretudo no perceber possíveis erros na execução. Por fim demos as considerações finais, agradecendo pela participação de todos e parabenizando-os pelo "Dia do Estudante".

JOGO DIGITAL DO "*MATH THE CROSS MATH PUZZLE*"

Todo o encontro foi pautado em um jogo online. O aplicativo do jogo foi apresentado antes do encontro para os alunos, em nosso grupo do *WhatsApp*, como suporte para auxiliar na aprendizagem das quatro operações matemáticas. Para esse dia de oficina foi usado apenas duas das quatro operações: a adição e a subtração. O jogo "*Math the cross math puzzle*" que em português significa "matemática cruzada matemática quebra-cabeças" é um dos recursos que podemos utilizar na sala de aula, articulando-se também com a nossa proposta de "Gamificação".

Imagem 6 – Jogando o "Math the Cross Math Puzzle"

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Durante o início da aula, para a explicação do jogo, foi notado que alguns estudantes não tinham baixado e utilizado antes do encontro, como orientado. Tivemos que repensar o planejado, naquele momento, para permitir que houvesse um momento de aproximação com o jogo, para que conseguissem entender todo o processo do jogar e sua utilização. Depois desse momento inicial de aproximação ao dispositivo potencialmente lúdico, demos inicio a partida. A equipe 02 iniciou e nos surpreendeu, sobretudo pela facilidade no manusear e resolver os cálculos matemáticos, em alguns momentos a partir de cálculo mental.

As partidas teriam apenas uma tentativa para cada equipe, pois os encontros têm apenas uma hora de duração; no entanto, os estudantes ficaram tão empolgados com o jogo que foi necessário fazer outra jogada para ambas às equipes, ampliando o tempo do encontro. A equipe dois conseguiu um bônus por responder todas as questões certas e em tempo menor que a equipe rival.

REVISANDO APRENDIZADOS: OPERAÇÕES DE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Nesse encontro iniciamos o trabalho com as operações de Multiplicação e Divisão. Sendo assim, abordamos o contexto histórico dessas operações, pois assim os estudantes

poderiam criar relações e entender o processo até as operações como conhecemos atualmente. Apresentamos diferentes contextos onde se utiliza essas operações e como determinados povos tinham maneiras diferentes de realiza-las.

O Documento Curricular Referencial da Bahia ressalta que

> Para tanto, é preciso substituir as formas tradicionais de ensino por aprendizagens ativas que tornem o aluno protagonista do seu próprio processo ensino-aprendizagem, valendo-se dos recursos didático-pedagógicos presentes no cotidiano. Deve-se buscar, então, a autonomia intelectual dos alunos, por meio de atividades planejadas pelo professor, para promover o uso de diversas habilidades de pensamento, como interpretar, analisar, sintetizar, classificar, relacionar e comparar, como possibilidade de desenvolver o processo de aprendizagem que foca uma formação crítica de estudantes e profissionais voltada para uma inserção consciente no mundo cultural e social (BAHIA, 2019, p. 312).

Com isso, apresentamos também algumas propriedades da multiplicação e divisão, explicando e exemplificando cada uma delas.

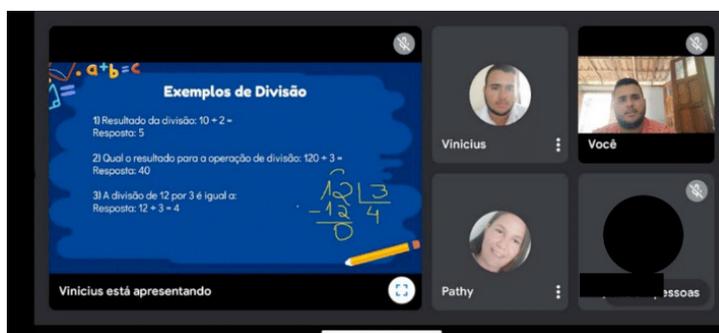



Imagem 7 – Revisando as operações de multiplicação e divisão

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Dessa forma, resolvemos alguns exemplos e envolvemos os estudantes para perceber se tinham algumas dúvidas. Nesse processo, íamos fazendo perguntas em relação à multiplicação e divisão para podermos perceber se os estudantes estavam compreendendo sobre essas duas operações. Alguns alunos assumiram ter bastante dificuldade em operar com a divisão, e ao saber disso, tentamos abordar esse assunto da melhor maneira para possibilitar a aprendizagem efetiva desses alunos que têm dificuldades.

Dessa forma, optamos em utilizar exemplos e fazer os cálculos juntos com os participantes, respeitando as suas especificidades e acompanhando um a um [os que se sentiam confortáveis em sinalizar que possuíam dificuldades]. Esse movimento, para nós, permitiria que os outros colegas que também tem dificuldade e não se sentem confortáveis em assumi-las, pudessem entender a partir das explicações feitas. Portanto, finalizamos o nosso encontro realizando algumas perguntas, buscando observar se ainda tinha ficado

alguma dúvida em relação aos conteúdos trabalhados.

ORIENTAÇÕES DAS PRODUÇÕES VIRTUAIS

Nesse encontro, como planejado, iniciamos as orientações em relação às duas atividades que aconteceriam no oitavo e nono encontro da nossa oficina pedagógica. Essas orientações visavam auxilia-los em suas produções coletivas.

> No ensino de matemática, já existe muitas possibilidades de trabalhar os conceitos desta disciplina, não utilizando o ensino tradicional, mas, levando em consideração outras propostas metodológicas, como a resolução de problemas, a abordagem Etnomatemática, o uso de computadores, a modelagem matemática e o uso de jogos matemáticos, procurando fazer com que o aluno deixe de ser um simples receptor de conteúdos, passando a interagir e participando do próprio processo de construção do conhecimento. (CABRAL, 2006, p. 13).

Desta forma, começamos o nosso sexto encontro conversando com eles sobre a importância da matemática na vida e o quanto ela faz parte nas mínimas atividades cotidianas. Com isso, explicamos que cada equipe teria que produzir cinco problemas matemáticos a partir de suas vivências. Para isso, instruímos os estudantes sobre o que seria um problema matemático e exemplificamos para eles alguns problemas envolvendo as quatro operações fundamentais.

Imagem 8 – Orientações para construção virtuais

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Sendo assim, os problemas matemáticos seriam parte da produção das equipes participante e necessária para o oitavo encontro de nossa oficina. A dinâmica, com a criação dos problemas, será: cada equipe responderá os problemas criados pela equipe adversária. Assim sendo, continuamos nossas orientações para a segunda produção de cada equipe, no qual consistem em criarem diferentes trabalhos abordando a matemática e as operações fundamentais, assim, deixando livres para expressarem sua criatividade

matemática.

Nesse sentido, apresentamos algumas possibilidades para essas produções matemáticas que as equipes terão que construir até o nono encontro de nossa oficina. Dessa forma, explicamos que eles poderiam realizar uma produção audiovisual, um vídeo, podendo utilizar diferentes recursos da internet, ou materiais que eles têm na própria casa, montar algo lúdico, para eles, e que apresente aspectos matemáticos nessa produção. Outras possibilidades que demos para os estudantes foram à produção de *podcast*, que são basicamente um programa de áudio que pode ser escutado pela internet. Nesse momento até pontuamos alguns exemplos como um diálogo no qual se discute a Matemática ou, por exemplo, abordar a história matemática; citamos alguns exemplos desse estilo, para auxiliar nessa construção.

Além desses já citados, também demos as opções de criação de História em quadrinho ou memes, sendo que eles podem utilizar a criatividade para montar HQs com histórias matemáticas, por exemplo. Portanto, finalizamos o encontro, ressaltando a importância dessas produções para eles e deixamos mais orientações e exemplos através do *WhatsApp*. Com isso, poderíamos possibilitar ainda mais uma proposta gamificada, e que permitisse aos participantes protagonismos na construção do matematizar.

> A gamificação pode ser pensada a partir de pelo menos duas perspectivas: enquanto persuasão, estimulando a competição, tendo um sistema de pontuação, de recompensa, de premiação etc., o que do ponto de vista da educação reforça uma perspectiva epistemológica empirista; e enquanto construção colaborativa e cooperativa, instigada por desafios, missões, descobertas, empoderamento em grupo, o que do ponto de vista da educação nos leva à perspectiva epistemológica interacionista construtivista-sistêmica. (SCHLEMMER 2014, p.79.)

Contudo, vale destacar que os participantes sinalizaram positivamente quanto à proposta pensada para construção coletiva e que valeria pontos para a Gincana Matemática. Acharam interessante utilizar formas diferentes de ensinar e aprender os conteúdos de Matemática, já que nesse processo de discussão apresentamos exemplos de tirinhas que se relacionavam com essa ciência. Essa atividade fortaleceria ainda mais a autonomia dos participantes, que em equipe pensariam a produção do grupo.

GINCANA DAS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Nesse sétimo encontro iniciamos nossa terceira atividade da gincana, que contou pontos para o *ranking* das equipes. Sendo assim, pensamos em trabalhar com a multiplicação e a divisão através de um jogo no *PowerPoint* que consiste em escolher as coordenadas e eles resolverem, juntos, as perguntas que aparecerem.

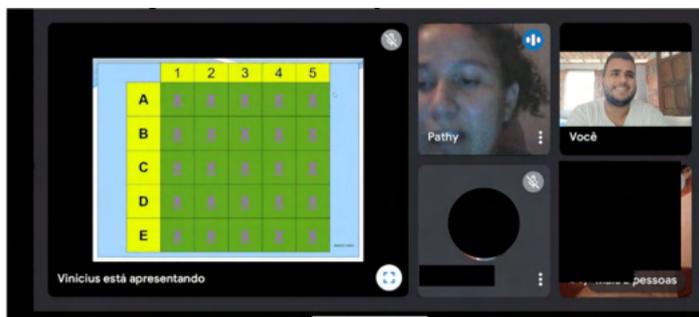



Imagem 9 – Gincana das Operações Fundamentais

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Sendo assim, esse jogo é intitulado de “Gincana das Operações Fundamentais”, e como dito anteriormente, para ser jogado era necessário que um dos membros de cada equipe escolhesse as letras e os números disponíveis na tabela, assim aparecendo à pergunta a ser respondida. Existiam perguntas variadas de multiplicação e divisão, charadas matemáticas e alguns coringas, que poderiam beneficiar a equipe dando pontos, ou retirando pontos, ou ficando uma rodada sem jogar.

Imagem 10 – Pergunta da Gincana das Operações Fundamentais

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Durante a vivência desse jogo os estudantes ficaram bastante entusiasmados em participar e vencer da equipe oponente. E assim, as equipes trabalhando coletivamente respondiam aos problemas matemáticos, utilizando raciocínio lógico. Algo bem pertinente a destacar é que os estudantes já demonstravam, até esse momento da oficina, avanços quanto à interpretação dos problemas matemáticos, superando algumas dificuldades percebidas durante alguns encontros anteriores.

Portanto, finalizamos nosso encontro realizando algumas reflexões acerca do jogo planejado para o momento, no qual discutimos a importância da participação e colaboração em equipe para finalizar as atividades. Percebemos que os estudantes gostaram da

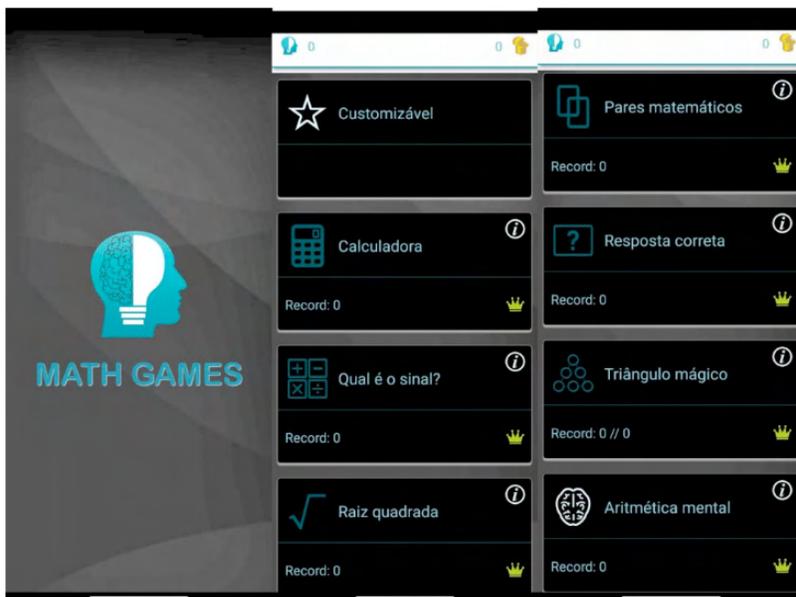
dinâmica de trabalho para o encontro.

JOGANDO O "*MATH GAME*"

Nesse encontro tínhamos planejado, inicialmente, a vivência da dinâmica dos Problemas Matemáticos. Porém, tivemos que replanejar pelo fato dos estudantes participantes revelarem não estarem à vontade para construírem as produções virtuais, que poderiam ser vídeos, histórias em quadrinhos, memes, entre outros. Dessa forma, optamos em realizar essa mudança para permitir mais tempo para os estudantes.

Esses movimentos de entender a realidade e repensar o planejado, para o momento, nos revela que o planejamento é flexível e precisa atender as demandas pedagógicas, sociais e políticas. Na direção do apontado, portanto, entendemos que

> Planejar vai muito além de preencher quadrinhos, como foi diagnosticado em algumas escolas onde aconteceu o estágio. É importante colocar o planejamento em prática, e que implica vivenciar e perceber os possíveis erros, e corrigi-los para atividades futuras. Sua funcionalidade não está na forma de sua estruturação (possíveis "modelos" adotados), mas na organização dessas ações que se apresentam de forma singular (Projeto Político Pedagógico) no contexto escolar. (SILVA et al, 2014, p. 47).

Dessa forma, nesse encontro, buscamos um jogo no qual os estudantes pudessem realizar em conjunto as tarefas destinadas as equipes. Então, baixamos no *play store* um Jogo da Matemática, que tem vários joguinhos diferentes que utiliza das diferentes operações fundamentais para se jogar. Nesse sentido, fizemos várias jogadas com cada modalidade diferente do jogo e a equipe que conseguisse terminar em menor tempo, ou acertando todas as questões propostas, somaria no ranking 50 pontos ao final da dinâmica para sua equipe.

Imagens 11, 12 e 13 – Jogo do "Math Game"

FONTE: https://play.google.com/store/apps/details?id=godlinestudios.MathGames, 2021.

Como podemos ver nas imagens acima, existem diferentes modos nesse jogo. Optamos, primeiramente, em jogar duas rodadas no modo "Customizável", onde configuramos para que tivessem perguntas de adição, subtração, multiplicação e divisão, em nível médio com um tempo de 02:00 min para cada rodada.

Assim, depois jogamos uma rodada no modo "Calculadora", outra no modo "Qual é o sinal?" e rodadas testes nos modos "Pares Matemáticos", "Resposta Correta" e "Aritmética Mental". Por fim, a equipe 1 somou em sua pontuação 100 pontos por ter vencido mais rodadas que a equipe 2, que acabou ficando com 50 pontos.

Portanto, os estudantes pontuaram que os jogos propostos são de fácil manuseio. Nesse ínterim, percebemos que os participantes gostaram da proposta apresentada, pois participaram efetivamente das etapas, além de jogarem vários *rounds,* a pedido dos próprios estudantes.

PROBLEMAS MATEMÁTICOS: RESOLVENDO E APRENDENDO

Nesse encontro utilizamos para a construção da atividade proposta os problemas matemáticos construídos pelos estudantes participantes da oficina. Vale salientar que tivemos um encontro específico para orientá-los nessa produção, exemplificando e definido o que são problemas matemáticos e como construí-los.

Imagem 14 – Problemas Matemáticos

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Dessa forma, os estudantes participantes da nossa oficina construíram muitos problemas matemáticos, e para não os deixar sem representação na atividade, lemos todos e selecionamos juntos aqueles mais pertinentes e com maiores possibilidades de resolução e reflexão. Sendo assim, foram selecionados 10 problemas matemáticos de cada equipe, mesmo tendo solicitado a produção de 05 apenas.

Imagem 14 – Problemas construídos pelos estudantes

FONTE: Acervo pessoal da equipe, 2021.

Com isso, colocamos todos os problemas matemáticos produzidos nos slides com um espaço para resolução e explicação do mesmo. E para a atividade realizada possibilitar a interação, foram dispostos em ordem sequencial, primeiro da equipe 1 e depois da equipe 2, e assim por diante, para que a equipe oposta pudesse resolver o problema matemáticos construído pela oponente.

Tivemos um encontro com muita interação e quase nenhuma resolução errada. Ambas as equipes estavam conseguindo compreender os problemas e resolver no tempo estabelecido para cada equipe. Após os estudantes darem a resposta, conferimos juntamente com eles, realizando o cálculo e interpretando o problema. Foi um encontro onde tivemos essa interação durante todo o processo de realização.

SOCIALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS

O último encontro foi um momento de socialização, permitindo aos alunos recordarem os momentos que vivenciaram durante todos os encontros da oficina, mostrando as conquistas e dificuldades nas atividades que foram realizadas. Os alunos ficaram bastante curiosos mediante o que mostramos para eles, as lembranças das atividades fizeram com que eles falassem o que sentiam e o que aprenderam durante essa Gincana.

Cada estudante teve a sua oportunidade de expor o que mais gostou dentro da oficina e o que ela proporcionou. Os alunos descreveram que não imaginavam que os jogos poderiam proporcionar aprendizagens, além de que as atividades que eles imaginavam seriam como as aulas que eles estavam acostumados a participar na escola, em suas aulas remotas; porém, segundo eles, foi totalmente diferente e, ainda para eles, quando os encontros tinham os jogos eram muito divertidos. Eles contaram que gostaram de todos os jogos, mas o da trilha matemática foi o que mais chamou atenção deles.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando todas as construções e vivência dentro da oficina, é importante dizer que o processo de aprendizagem varia muito de aluno para aluno. Cada pessoa tem o seu estilo e ritmo de aprender e se desenvolver. Para conseguir atender as necessidades dos alunos foi preciso conhecer quais as metodologias que serviriam para abranger a maioria dos estudantes durante a construção do saber matemático. Para isso, conhecer o verdadeiro significado de ludicidade foi de suma importância.

Durante as vivências da oficina pedagógica foi visível a compreensão e participação dos alunos em aulas com materiais didáticos potencialmente lúdicos e ou ligados diretamente ao seu cotidiano. O jogo é um dos principais recursos que utilizamos para os encontros de aprendizagem. diante disso esse recurso teve uma aceitação e desenvolvimento muito positivo. As atividades propostas provocaram participação, competição, aprendizagens e o aprimoramento de estratégias. Os alunos, mediante essas atividades, conseguiram despertar o seu pensamento matemático para resolver os problemas que os games ofereceram.

Destarte, durante o início das atividades não foi fácil. Quando levamos o convite aos alunos para a participação, sendo ela não obrigatória, os estudantes não tiveram muito interesse em participar. A atualidade que eles vivem em estudar por ensino remoto fez com que eles acreditassem que os encontros da gincana seriam aulas como as que tinham até aquele momento.

Então, podemos dizer que a oficina em formato de Gincana Matemática mostrou aos alunos que existem vários mecanismos de aprendizagens. Estes mecanismos contribuíram para o processo de ensino e aprendizagem. Além disso, essa experiência contribuiu diretamente para a nossa formação docente, pois proporcionou vivências que

somente uma oficina pedagógica poderia possibilitar. Como monitores, ao desenvolver os encontros da gincana, foi possível vivenciar situações que são comuns ao ser docente na contemporaneidade, com todas as suas possibilidades e desafios.

REFERÊNCIAS

BAHIA. **Documento Curricular Referencial da Bahia para Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Secretaria da Educação. Superintendência de Políticas para Educação Básica. União Nacional dos Dirigentes Municipais da Bahia. União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação. Salvador: Secretaria da Educação, 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 06 nov. 2019.

CABRAL, Marcos Aurélio. **A utilização de jogos no ensino de matemática**. 2006. 52 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática)-Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006. Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/jogos/Marcos_Aurelio_Cabral.pdf. Acesso em: 30 set. 2021.

FARDO, Marcelo Luis. **A gamificação como método**: Estudo de elementos dos games aplicados em Processos de ensino e aprendizagem. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul.

LEAL, L. A. B.; TEIXEIRA, C. M. d'Avila. A ludicidade como princípio formativo. **EDUCAÇÃO**, *[S. l.]*, v. 1, n. 2, p. 41–52, 2013. DOI: 10.17564/2316-3828.2013v1n2p41-52. Disponível em: https://periodicos.set.edu.br/educacao/article/view/395. Acesso em: 19 nov. 2021

LIMA, M. S. L.; PIMENTA, S. G. ESTÁGIO E DOCÊNCIA: DIFERENTES CONCEPÇÕES. **Poíesis Pedagógica**, [S. l.], v. 3, n. 3 e 4, p. 5–24, 2006. DOI: 10.5216/rpp.v3i3e4.10542. Disponível em: https://www.revistas.ufg.br/poiesis/article/view/10542. Acesso em: 11 nov. 2021.

SCHLEMMER, E. Gamificação em espaços de convivência híbridos e multimodais: design e cognição em discussão. **Revista da FAEEBA - Educação e Contemporaneidade**, v. 23, n. 42, 11.

SILVA, Américo Júnior Nunes da; et al. **O professor de Matemática e o Ato de Planejar: Há unicidade entre dimensão política e dimensão pedagógica.** Silva, AJN & Sousa, IS (2014) A Formação do Professor de Matemática em Questão: Reflexões para um Ensino com Significado, Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

CAPÍTULO 3

MODELOS MATEMÁTICOS E EPIDEMIAS

Data de aceite: 02/05/2022

Célia Maria Rufino Franco
Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande
Cuité - Paraíba
http://lattes.cnpq.br/1728798138944094

Ivo Dantas de Araújo
Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba
http://lattes.cnpq.br/3069265759080879

Mateus Ferreira Carvalho da Silva
Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba
http://lattes.cnpq.br/6765321340841781

Eduardo da Silva Lima
Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande
Cuité - Paraíba
http://lattes.cnpq.br/3705577178602392

RESUMO: As equações diferenciais são utilizadas com frequência na construção de modelos matemáticos aplicados em várias áreas do conhecimento, tais como: nas engenharias, na física, na química, na biologia, na ecologia e na medicina. Este trabalho tem como objetivo apresentar ferramentas matemáticas para compreender a evolução de uma epidemia. Inicialmente utilizou-se modelos de crescimento exponencial e logístico para descrever a evolução de uma doença. Com isto, foi possível analisar algumas aplicações da teoria da dinâmica populacional no contexto de pandemias e verificar como as equações autônomas são usadas para formular modelos importantes no estudo, controle e enfretamento de pandemias. Em seguida, foi realizado um estudo do modelo matemático clássico em epidemiologia do tipo SIR (suscetível-infectado-removido). O modelo SIR foi resolvido numericamente e aplicado para descrever a evolução da Covid-19 no Brasil. Dados oficiais de infectados pela Covid-19 foram comparados com os dados simulados e a taxa de infecção foi determinada pelo método dos mínimos quadrados. O modelo SIR descreve bem os dados de infectados no Brasil para o período analisado.

PALAVRAS-CHAVE: Simulação, Equações Autônomas, Modelo SIR, Covid-19.

MATHEMATICAL MODELS AND EPIDEMICS

ABSTRACT: Differential equations are frequently used in the construction of mathematical models applied in several areas of knowledge, such as: engineering, physics, chemistry, biology, ecology and medicine. This work aims to present mathematical tools to understand the evolution of an epidemic. Initially, exponential and logistic growth models were used to describe the evolution of a disease. With this, it was possible to analyze some applications of the theory of population dynamics in the context of pandemics and to verify how the autonomous equations are used to formulate important models in the

study, control and coping of pandemics. Then, a study of the classical mathematical model in epidemiology of the SIR type (susceptible-infected-removed) was carried out. The SIR model was numerically solved and applied to describe the evolution of Covid-19 in Brazil. Official data of infected by Covid-19 were compared with simulated data and the infection rate was determined by the least squares method. The SIR model describes well the data of infected people in Brazil for the analyzed period.
KEYWORDS: Simulation, Autonomous Equations, SIR Model, Covid-19.

1 I INTRODUÇÃO

Vários registros na história evidenciam impactos desastrosos de epidemias na humanidade. A peste negra foi uma das maiores pandemias já registradas, tendo início na China e se alastrando pela Europa durante o século XIV. A gripe espanhola, provocada pelo vírus influenza do tipo A H1N1, resultou em milhares de mortes entre 1918 e 1920. Outras doenças também foram registradas tais como: cólera, tuberculose, varíola, gripe, sarampo e malária, que também causaram muitas mortes.

A pandemia da Covid-19 causada pelo vírus Sars-CoV-2, iniciou-se em dezembro de 2019 e espalhou-se pelo mundo. No Brasil, o primeiro caso reportado foi em 25 de fevereiro de 2020 de um morador da cidade de São Paulo que esteve na Itália (OLIVEIRA e ORTIZ, 2020; BATISTA e SILVA, 2020).

Uma epidemia consiste em uma rápida disseminação de uma doença em um curto intervalo de tempo (GIANNELLA e VELHO, 2020). Portanto, os conceitos matemáticos para entender a evolução de uma epidemia envolvem crescimento exponencial e sistemas dinâmicos. A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas iniciou-se em 1760, quando Daniel Bernoulli desenvolveu trabalho relativo à Varíola (BOYCE e DIPRIMA, 2015). A área de estudo em epidemiologia matemática surgiu logo após a pandemia da gripe espanhola, tendo adquirido sua forma a partir dos trabalhos realizados entre 1927 e 1933 por dois pesquisadores escoceses, Anderson McKendrick e William Kermack, que desenvolveram os modelos compartimentais do tipo SIR (suscetível-infectado-removido) e do tipo SIRS (suscetível-infectado-removido-suscetível), para descrever infecções endêmicas (KERMARK e MCKENDRICK, 1927; BASSANEZI, 1988; ROCHA, 2012; LUIZ, 2012; TAKAHASHI, 2020; GIANNELLA e VELHO, 2020).

Muitos modelos matemáticos têm sido propostos e estudamos para diversas doenças diferentes com o objetivo de compreender o desenvolvimento em comunidades, regiões e países, e analisar o impacto de medidas de controle, como a vacinação, ou outras medidas imprescindíveis para a sua contenção e erradicação (MORRISON, 2020; MANRIQUE-ABRIL et al., 2020; FRANCO e DUTRA, 2021).

Modelos matemáticos e simulações numéricas são ferramentas úteis para realizar projeções de como uma doença infecciosa se propaga e testar teorias e conjecturas de avaliação quantitativa. Com os modelos matemáticos é possível determinar parâmetros e

projetar a evolução de epidemias, como por exemplo da Covid-19.

Deste modo, o presente trabalho tem como objetivo apresentar modelos matemáticos para descrever a evolução de uma epidemia, envolvendo desde a teoria de dinâmica populacional, com modelos de crescimento exponencial e logístico, até o estudo do processo como um sistema dinâmico usando o modelo clássico de epidemiologia do tipo SIR. Os modelos matemáticos abordados foram aplicados no contexto da pandemia da Covid-19.

2 I MODELOS MATEMÁTICOS E APLICAÇÕES

2.1 Crescimento Exponencial

Durante a fase inicial de crescimento, a curva epidêmica pode ser modelada pela função exponencial. Uma função é dita exponencial, quando ela pode ser escrita da seguinte forma: $I(t)=I_0e^{yt}$, onde, I denota os indivíduos infectados, y é a taxa de crescimento exponencial e I_0 é o valor inicial em t=0.

Considerando que uma população total de indivíduos constante igual a pode ser dividida em duas partes: os que tem determinada doença e podem infectar outros, e os que não têm, mas são suscetíveis. No instante t, seja $S(t)$ a proporção de indivíduos suscetíveis, e seja $I(t)$ a proporção de indivíduos infectados. Então: $I(t)+ S(t)= N(t)$.

Suponha que a doença espalha-se através do contato entre os indivíduos doentes e os suscetíveis e seja α a taxa de infecção da doença. Os casos de mortalidade em decorrência da doença e os casos de infectados que foram curados são considerados como removidos, onde β denota a taxa de remoção. Dessa forma, a variação de infectados *dI/dt* ao longo do tempo é a diferença entre o número de novos infectados e a parcela de infectados que foram curados e adquiriram imunidade ou morreram, assim:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha\frac{S}{N}I - \beta I = I\left(\alpha\frac{S}{N} - \beta\right) = I\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{S}{N} - 1\right) \quad (1)$$

Considerando que no início da pandemia $\frac{S}{N} \approx 1$, tem-se:

$$\frac{dI}{dt} \approx I\beta(R_0 - 1) \quad (2)$$

onde, $R_0=\alpha/\beta$ é o número básico da reprodução, que mede a velocidade com que a epidemia se propagava. Medidas como distanciamento social e quarentena tem o efeito de diminuir a taxa de infecção α e consequentemente, o R_0.

A Equação (2) é uma Equação Diferencial Ordinária separável, cuja sua solução é dada por:

$$I \approx I_0e^{\beta(R_0-1)t} \quad (3)$$

ou ainda,

$$I \approx I_0 e^{(\alpha-\beta)t} \quad (4)$$

onde $I(0)=I_0$. Note que $y=\beta(R_0-1)$ é a taxa de crescimento exponencial.

Seja D o tempo médio em que um indivíduo permanece infectado, então a taxa de remoção é dada por: $\beta=D^{-1}$. Neste trabalho, considerou-se o período de contágio de 10 dias. Logo, β=0,1. O valor de α pode ser obtido através do método dos mínimos quadrados. A Equação (4) foi ajustada aos dados oficiais de infectados pelo novo Coronavírus no Brasil no período 25/02/2020 a 23/03/2020. Para tanto, utilizou-se o programa *Statística*, considerando os dados iniciais: I_0=1, β=0,1.

A figura (1) mostra a comparação dos dados oficiais de infectados no Brasil, com o modelo exponencial. A taxa de crescimento ajustada foi α=0,371699. O coeficiente de determinação R^2, que é um indicador estatístico que mede a qualidade do ajuste foi 0,996634710. Observa-se que o modelo exponencial descreve bem o período inicial da evolução da Covid-19 no Brasil.

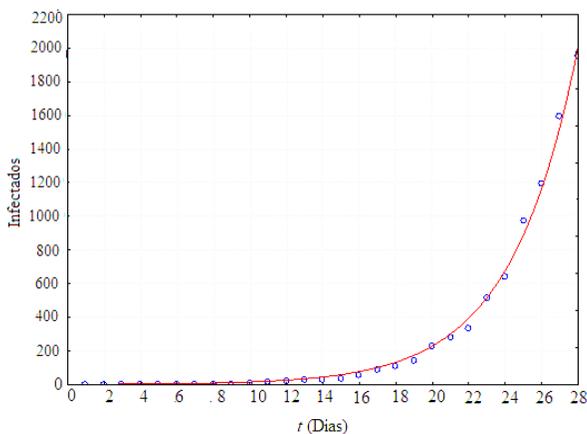



Figura 1 - Curva Epidêmica da Covid-19 no Brasil (25/02/2020 a 23/03/2020).

FONTE: Autores

2.2 Crescimento Logístico

Como já fora observado anteriormente, a evolução inicial de uma epidemia pode ser descrita pela função exponencial. Porém, com a evolução do tempo, o número de infectados atinge um ponto de inflexão e a partir deste ponto deve ocorrer uma redução na taxa de crescimento até se aproximar do número máximo de infectados (capacidade de suporte). Desta forma, a função logística tem essas características e o processo completo de pandemia pode ser modelado pelo crescimento logístico (GIANELLA e VELHO, 2020).

A Equação de Verhulst ou Equação Logística é dada por (BOYCE e DIPRIMA, 2015):

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y \qquad (5)$$

onde r e a são parâmetros do modelo. Podemos convenientemente escrever a equação (5) da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dt} = r(1 - \frac{y}{K})y \qquad (6)$$

onde $K=r/a$ é a capacidade de suporte. A constante r é chamada de taxa de crescimento intrínseca, ou seja, a taxa de crescimento na ausência de um fator limitador.

A partir da Equação (6) pode-se concluir que quando a grandeza y é muito inferior a capacidade suporte, então y/K se aproxima de zero e o crescimento se aproxima do exponencial. Por outro lado, quando y se aproxima da capacidade suporte, então y/K se aproxima de 1 e a taxa de crescimento se aproxima de zero.

A Equação (6) é separável e sua solução, considerando a condição inicial $y(0)=y_0$, é dada por (BOYCE e DIPRIMA, 2015):

$$y\,(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - \; y_0)e^{-rt}} \qquad (7)$$

A Equação dada em (7) é chamada função logística. Note que, se $y_0>0$ e se fizermos $t \rightarrow \infty$ em (7), obteremos

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{y_0 K}{y_0} = K.$$

Vamos apresentar a seguir, aplicações do modelo logístico na disseminação de uma doença. Para tanto, considere $y(t)$ o número de infectados no tempo t e y_0 é o número de casos no início da doença. A função logística (Equação 7), pode ser escrita de uma forma mais compacta:

$$y(t) \;= \frac{K}{1 + be^{-rt}} \qquad (8)$$

onde $b = \frac{K - y_0}{y_0}$.

Suponhamos um caso hipotético onde o número máximo de pessoas doentes é 1000 (tamanho da população), ou seja, a população máxima desse ambiente será igual a 1000 e o processo endêmico começa com apenas uma pessoa infectada e que pode infectar três outras pessoas. Neste caso, K=1000, b=999 e r=3. A Figura 2 mostra a função logística correspondente à simulação de um período de dez dias.

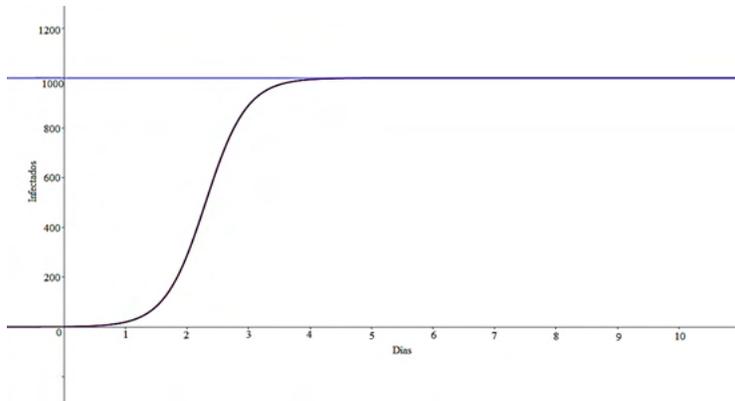



Figura 2 - Gráfico da solução 2 da função logística da Epidemia hipotética

FONTE: Autores

Consideremos, agora, a pandemia da Covid-19. Vamos admitir três possibilidades: (1) o indivíduo pode ser portador do vírus e ser assintomático; (2) o indivíduo pode desenvolver a doença e ser curado e; (3) o indivíduo pode desenvolver a doença e falecer. As pessoas mencionadas em (1) e (2) se tornam imunes ao vírus. Então, assim, a disponibilidade de recursos para o vírus (suscetíveis) vai se reduzindo à medida que ele se espalha e aproximando-se da capacidade suporte.

Assim, a taxa de infectados depende do número de portadores do vírus e, também, do número de pessoas suscetíveis ao vírus. Excluímos dessa conta, gradativamente, o número de pessoas que se tornam imunes, observa-se a redução da disponibilidade do recurso para o vírus. Desta maneira, podemos supor que à medida que o vírus se alastra, ele tende ao crescimento logístico (GONÇALVEZ, 2021). Para ilustrar essa tendência, observe o gráfico comparativo do número de novas pessoas infectadas no Brasil e na China (Figura 3) disponível em Our World In Data (acesso em 26 de agosto de 2021).

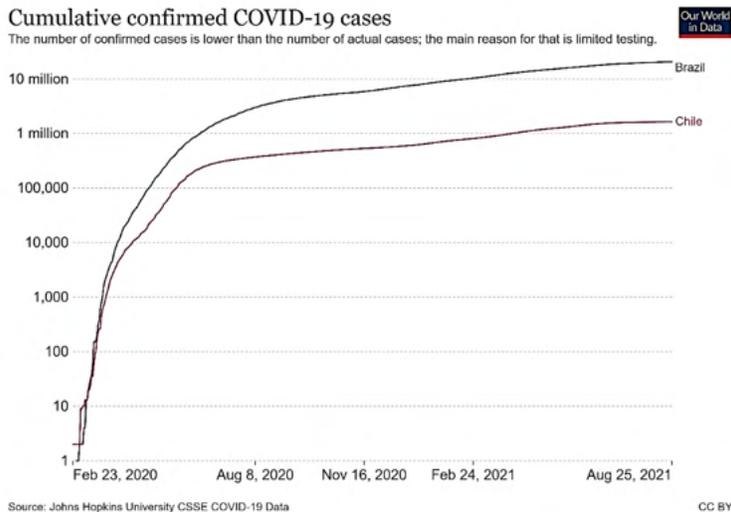



Figura 3 - Número total de casos de Covid-19 confirmados no Brasil e na China.

FONTE: Our World in Data (Acesso: 26 de agosto de 2021).

A Figura 4 mostra os dados de infectados pela Covid-19 na Paraíba no período de 22/08/2020 a 16/11/2020, coletados na webpage da Secretaria de Saúde do Estado. Próximo a data 27 de julho de 2020, observa-se um provável ponto de inflexão e a evolução da doença segue um crescimento logístico.

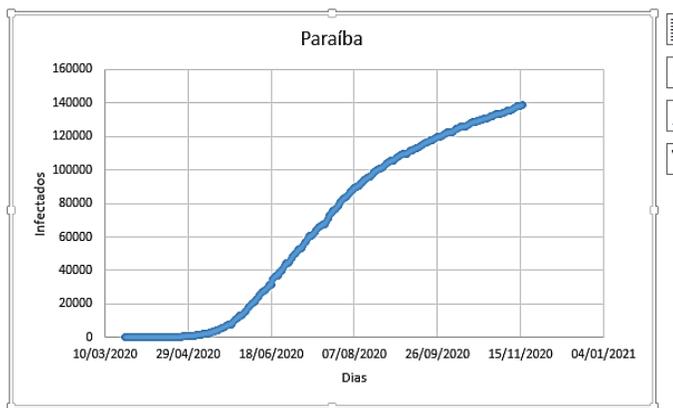



Figura 4 – Casos de Covid-19 na Paraíba no período 22/08/2020 à 16/11/2020.

FONTE: Autores

De acordo com os exemplos apresentados, a equação logística pode ser utilizada no estudo da disseminação de uma doença. Além disso, segundo Boyce e Diprima (2015),

o trabalho de Daniel Bernoulli em 1760, baseado na equação logística, tinha como objetivo avaliar o quão efetivo estava sendo um programa controverso de vacinação contra a varíola, que era um grande problema de saúde pública da época. Usando os melhores dados sobre mortalidade disponíveis na época, Bernoulli calculou que, se as mortes por varíola pudessem ser eliminadas, poderia adicionar aproximadamente 3 anos à vida média esperada em 1760 de 26 anos e 7 meses. Portanto, ele apoiou o programa de vacinação. Seu modelo se aplica igualmente bem a qualquer outra doença que, uma vez adquirida, se o paciente sobreviver, ganha imunidade para o resto da vida.

2.3 Modelo SIR

A classe de modelos epidemiológicos para calcular o número teórico de pessoas infectadas por uma doença contagiosa, ao longo do tempo, é conhecido como modelo do tipo SIR. Este modelo consiste em um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares relacionando o número de indivíduos da população de acordo com seu estado da doença: Suscetíveis $S(t)$, Infectados $I(t)$ e Removidos $R(t)$. Entende-se por removidos os indivíduos que foram curados ou morreram, deixando de influenciar no processo epidêmico. Considera-se que os indivíduos curados ficam imunizados permanentemente, o qual permanece no compartimento dos removidos e não volta ao grupo dos suscetíveis. Na figura 5 tem-se a representação do diagrama compartimental do modelo SIR.

Figura 5: Diagrama compartimental do modelo SIR.

FONTE: Autores

Vamos assumir que o tamanho da população é fixo e o período de incubação do agente infeccioso é instantâneo. Além disso, considera-se atuação igual sobre toda a população (população homogênea). Ao desprezarmos os nascimentos ou imigrações, mortes por causa natural ou outros fatores e os fenômenos migratórios, a população total é considerada fixa como sendo a soma dos indivíduos das classes S, I e R. Esta suposição é aceitável para períodos curtos, onde não há uma mudança muito significativa na população. Assim,

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t) \tag{9}$$

O modelo SIR envolve dois parâmetros importantes: α e β, onde α é a taxa de infecção da doença e β a taxa de remoção. Como a transmissão se dá com o contato entre suscetíveis e infectados, então o número de indivíduos suscetíveis diminui à uma taxa de propagação da doença (αSI). O número de indivíduos infectados aumenta ao longo

do tempo na mesma proporção e diminui a partir da cura dos indivíduos. A variação de removidos ao longo do tempo é proporcional ao número de infectados que foram curados e adquiriram imunidade ou morreram. Assim, o retorno à classe de suscetíveis será modelado por (βI). Desta forma, o sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica da epidemia é dado por (BASSANEZI et al., 1988; LUIZ, 2012):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I \end{cases} \quad (10)$$

A dinâmica do modelo é afetada principalmente pelo número básico de reprodução (R_0) e o tempo de infecção (período infeccioso), que é o tempo em que o indivíduo se recupera totalmente do vírus e migra para classe de removidos. Tem-se que $1/\beta$ é o tempo médio no qual um indivíduo permanece infectado, onde β é a taxa de remoção.Um dos pontos fundamentais em nossa análise é verificar se a doença irá ou não se espalhar. Em outras palavras, estabelecer condições em que $dI/dt > 0$ ou $dI/dt < 0$.

Seja N uma população fixa e $I_0 > 0$ a quantidade inicial de indivíduos infectados nessa população. Da segunda equação do sistema (10), no instante t=0, tem-se

$$\frac{dI}{dt}|_{t=0} = \alpha S_0 I_0 - \beta I_0 \begin{cases} > 0 \ se \ \ S_0 > \frac{\beta}{\alpha} \\ < 0 \ se \ \ S_0 < \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \quad (11)$$

Como $\frac{dS}{dt} \leq 0$ e $S \leq S_0$, então, se $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$, tem-se $S < \frac{\beta}{\alpha}$, de onde segue que:

$$\frac{dI}{dt} = I(\alpha S - \beta) \leq 0, \forall I \geq 0 \quad (12)$$

Nesse caso, $I(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, e não ocorre uma epidemia.

Por outro lado, se $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$, $I(t)$ aumenta e a doença se propaga, ocorrendo assim uma epidemia, ou seja, $I(t) > I_0$ para algum $t > 0$.

O número básico de reprodução é definido por $R_0 = \frac{\alpha S_0}{\beta}$. Quando $R_0 > 1$, cada pessoa doente irá infectar mais uma pessoa e a epidemia crescerá exponencialmente. Por outro lado, se $R_0 < 1$ cada pessoa doente infectará menos que uma pessoa, causando uma diminuição da epidemia (GIANELLA e VELHO, 2020).

Como aplicação do modelo SIR, utilizamos dados oficiais de infectados por Covid-19 no Brasil, no período de 25 de fevereiro de 2020 a 23 de março de 2020. O valor do parâmetro (α) foi estimado pelo método dos mínimos quadrados, minimizando a função:

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{t} (I_{oficial}(n) - I_{modelo}(n))^2 \quad (13)$$

Para simular computacionalmente o processo, utilizou-se o método de Euler com os dados de entrada: $N=S_0=210000000$, $I_o=1$, $R_o=1$, $\beta=0{,}1$. O valor obtido para o parâmetro α foi 0,372894371 e a comparação dos dados simulados com os dados oficiais de infectados por Covid-19 são apresentados na Figura 6.

A Figura 7 mostra a projeção da Covid-19 no Brasil para 140 dias, utilizando $\beta=0{,}1$ e $\alpha=0{,}372894371$. Observa-se a curva de recuperados segue o crescimento da função logística. A curva simulada de infectados na Figura 7 pode ser associada à curva de pessoas infectadas em um cenário sem medidas de contenção da doença (cenário de circulação livre). Note que o ponto de máximo da curva de infectados corresponde ao ponto de inflexão da curva de recuperados. Modificando o valor o parâmetro é possível simular cenários da epidemia e fazer previsões para que a curva de infectados seja mais suave (ou achatada), indicando uma taxa mais gradual de infecção por um longo período, isto é, um cenário com medidas de contenção da doença (cenário de distanciamento e isolamento social), na ausência de vacinação ou tratamento efetivo.

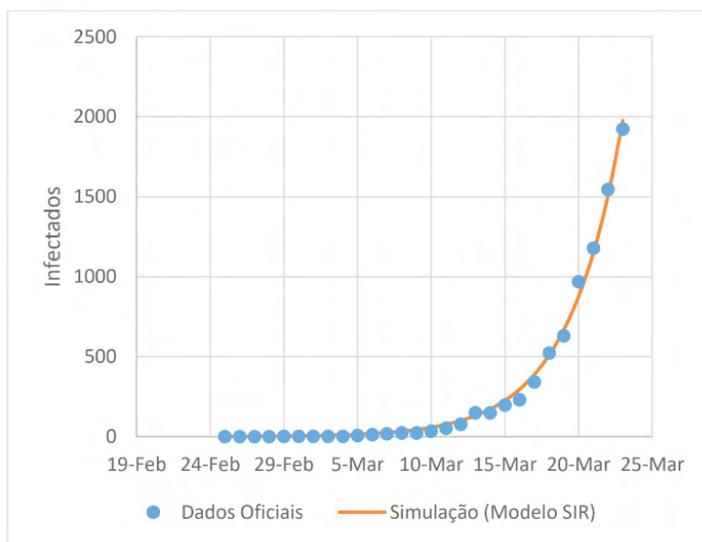



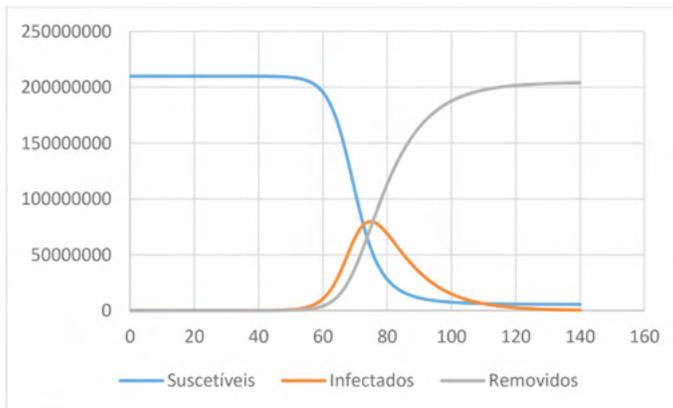
Figura 6: Curva Epidêmica da Covid-19 no Brasil (25/02/2020 a 23/03/2020).

FONTE: Autores

Figura 7: Modelo SIR para Covid-19 no Brasil.

FONTE: Autores

3 I CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados modelos matemáticos para descrever a evolução de uma epidemia. Por meio da modelagem matemática da evolução de uma epidemia é possível projetar cenários do impacto da doença em cada cidade, região e país.

Foi possível mostrar a importância da matemática para entender problemas práticos. Em particular, a função exponencial e a função logística podem ser utilizadas para facilitar o entendimento de alguns aspectos da pandemia.

Podemos concluir que, apesar do modelo SIR utilizado neste trabalho ser o mais simples, o mesmo mostrou-se eficiente para descrever a essência da dinâmica da epidemia da Covid-19 durante o período analisado. A partir do modelo SIR apresentado é possível estudar modelos mais complexos, que incluem outras categorias de indivíduos na população, como o modelo SIRD, que divide as pessoas removidas em recuperadas e mortas. O modelo SIR pode ser modificado considerando a população total não constante. Neste caso, considera-se o recrutamento na classe suscetível, por nascimentos e imigração, além da mortalidade por outros fatores. Uma variação do modelo SIR que torna a modelagem mais próxima da realidade consiste no modelo do tipo SEIR que incorpora o compartimento E (Exposto) que representa o estado de latência (período de incubação), os indivíduos naquele estado têm o agente infeccioso em seu corpo, porém, os sintomas ainda não começaram.

AGRADECIMENTOS

Os autores três e quatro deste trabalho agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento

de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelas bolsas que os possibilitaram contribuir com a presente pesquisa.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JÚNIOR, W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: HARBRA, 1988.

BATISTA, A. A.; SILVA, S. H. **Um Modelo Epidemiológico tipo SIR Aplicado à Dinâmica de Disseminação da COVID-19 no Brasil, na Paraíba e em Campina Grande**. ResearchGat, 2020. Doi: 10.13140/RG.2.2.26557.69600.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas e valores de contorno**. 10ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

FRANCO, C. M. R., e DUTRA, R. F. **Modelo SIR para propagação da Covid-19 no Estado da Paraíba (Brasil).** INTERMATHS, 2(2), 39-48. 2021. https://doi.org/10.22481/intermaths.v2i2.9696

GIANNELLA, J.; VELHO, L. **Visualização em tempos de Coronavírus**, 2020. Disponível em: https://www.visgraf.impa.br/Data/RefBid/OS_PDF/tr-07-2020/tr-07-2020.pdf. Acesso em: 25 de Agosto de 2021.

GONÇALVES, R. M. M. **A Teoria da Dinâmica de Populações e a pandemia**. https://avr.ifsp.edu.br/files/A%20Teoria%20da%20Dinamica%20de%20Populacoes%20e%20a%20Pandemia.pdf, 2021.

KERMARK, M. and MCKENDRICK, A. **Contributions to the mathematical theory of epidemics. part i**, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, vol. 115, no. 5, pp. 700–721, 1927. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118

LUIZ, M. H. R. **Modelos Matemáticos em Epidemiologia**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

MANRIQUE-ABRIL, F. G. et al. **Modelo SIR de la pandemia de COVID-19 en Colombia**. Revista de Salud Pública, Bogotá, v. 22, n. 01, p. 1-9, 2020.

MORRISON, R. E.; CUNHA, A. **Embedded model discrepancy: a case study of zika modeling.: A case study of Zika modeling**. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, v. 30, 051103, 2020. DOI https://doi.org/10.1063/5.0005204

OLIVEIRA, E.; ORTIZ, B. **Ministério da Saúde confirma primeiro caso de coronavírus no Brasil**. Brasília: G1, 26 fev. 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/cienciaesaude/noticia/2020/02/26/ministerio-da-saude-fala-sobre-caso-possivel-paciente-comcoronavirus.ghtml. Acesso em: 01 de maio de 2020.

ROCHA, D. I. C. **Modelos matemáticos aplicados à epidemiologia**. Dissertação (Mestrado em Métodos Quantitativos em Economia e Gestão) - Universidade do Porto, Porto, 2012.

TAKAHASHI, R. **A Matemática da COVID-19**. Ciência e Educação. Disponível em https://blogs.oglobo.gmatematica/post/matematica-da-covid-19.html. Acesso em 04 de junho de 2020.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS SEMIÓTICO DE RESPUESTAS AL CÁLCULO DE LA POTENCIA EN UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 08/04/2022

Osmar Dario Vera
Universidad Nacional Arturo Jauretche, Instituto de Ciencias de la Salud
Buenos Aires – Argentina
https://orcid.org/0000-0003-2163-8516

RESUMEN: En un problema de contraste estadístico de hipótesis, se pide como pregunta abierta la determinación de la potencia del contraste, dado un valor del parámetro bajo la alternativa y un nivel de significación. Analizamos las prácticas matemáticas implícitas en las respuestas de un grupo de 224 estudiantes de la Licenciatura en Psicología de la Universidad de Huelva a esa pregunta, usando como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática. Como parte del marco se consideran los objetos y procesos matemáticos intervinientes y emergentes de un sistema de prácticas , con el objetivo de descubrir los conflictos semióticos que desembocan en respuestas institucionalmente inadecuadas. Se presenta como resultado una clasificación pormenorizada de conflictos semióticos relacionados con los objetos que son parte de la determinación de la potencia de un contraste de hipótesis estadístico.
PALABRAS CLAVE: Potencia de un contraste, enseñanza de la estadÍstica, estudiantes de Psicología, conflicto semiótico, inferencia estadística.

SEMIOTIC ANALYSIS OF RESPONSES TO THE CALCULATION OF POWER IN A HYPOTHESIS TEST BY PSYCHOLOGY STUDENT

ABSTRACT: For a statistical test of hypothesis, an open question is asked to determine the power of the hypothesis testing, given a value of the parameter under the alternative and a significance level. We analyze the mathematical practices implicit in the answers´ group of 224 students belonging to Degree in Psychology of the University of Huelva to that question, using as theoretical framework the Ontosemiotic Approach of mathematical cognition. As part of the framework we consider the intervening and emerging mathematical objects and processes with the aim of discovering semiotic conflicts that lead to institutionally inadequate responses. We present as a result a detailed classification of semiotic conflicts related to objects that are part of the determination of the power of a statistical hypothesis contrast.
KEYWORDS: Power of a hypothesis test, statistics teaching, psychology students, semiotic conflict, statistical inference.

1 I INTRODUCCIÓN

El uso e interpretación de la estadística ha jugado un papel destacado en diversas ciencias humanas, en especial en Educación y Psicología, que basan sus investigaciones en datos recogidos en muestras de poblaciones, a las que quieren extender sus conclusiones, para lo cual es condición realizar inferencia

estadística. Sin embargo, el uso e interpretación de la inferencia estadística en estas investigaciones no son siempre adecuados, como se muestra en diversas revisiones. Errores de inadecuación en la interpretación, se producen también en estudiantes universitarios (Vallecillos, 1994; Díaz-Batanero et al., 2019; López Martin et al., 2019; Vera, Díaz y Batanero, 2011; 2013;).

En particular un objeto importante, pero muy poco tratado para la enseñanza en lo que se refiere al contraste de hipótesis es la comprensión del cálculo de la potencia de una prueba, la que se asocia con la probabilidad de cometer error tipo II, puesto que se puede interpretar también como la probabilidad de no cometer este error.

En este trabajo abordamos este objeto estadístico. Realizamos un estudio cualitativo de la determinación de la potencia estadística en un problema de prueba de hipótesis que un grupo de 224 estudiantes españoles en Psicología resuelven, después de haber seguido un curso de inferencia.

Nos apoyamos en nociones teóricas del enfoque onto-semiótico de la cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2014). Realizamos un análisis semiótico de las respuestas a dichas tareas, clasificándolas e identificando conflictos semióticos. Con todo ello aportamos elementos al profesor que le ayudará a planificar la enseñanza del tema. Seguidamente, presentamos los fundamentos del trabajo que incluyen antecedentes y marco teórico; luego el método, los resultados y la discusión.

2 I ANTENCEDENTES

La interpretación incorrecta más extendida relacionada con la comprensión del contraste de hipótesis es la de cambiar los términos de la probabilidad condicional en la definición del nivel de significación α (probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta), interpretándolo como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, habiendo tomado la decisión de rechazarla (Vallecillos, 1994; Batanero 2000). El mismo intercambio de condicional se hace en la interpretación del valor p (probabilidad de obtener un valor igual o más extremo al dado, si la hipótesis nula es cierta) lo cual se interpreta como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta si se obtuvo el valor dado del estadístico de prueba. La naturaleza condicional de la potencia de la prueba implica que se cometan las mismas equivocaciones antes mencionadas. Más concretamente, y utilizando el marco teórico que se describe a continuación, queremos analizar con mayor profundidad los posibles planteamientos incorrectos en la determinación de la potencia de una prueba de hipótesis.

3 I MARCO TEÓRICO

En este trabajo nos basamos en ideas teóricas propuestas en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2014) en los que se sugiere que el significado de

los objetos matemáticos o estadísticos (por ejemplo, los conceptos de potencia de una prueba estadística) es una entidad compleja, en la que intervienen los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios: situaciones-problemas, lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. Estos autores, destacan la diferencia entre significado institucional y personal; el primero refleja las practicas matemáticas que la institución intenta transmitir al estudiante, el segundo es el adquirido por el estudiante en el seno de la institución que podrían coincidir o no con las que ésta pretende. Utilizaremos el método de análisis semiótico propuesto por estos autores, para analizar las respuestas incorrectas de los estudiantes de Psicología en el planteamiento de la potencia de la prueba. Este análisis consiste en la identificación de las prácticas matemáticas de los estudiantes al tratar de plantear la potencia, así como de los objetos y procesos matemáticos implicados. Como resultado se identificarán conflictos semióticos de estos estudiantes, que se producen al realizar una función semiótica no adecuada desde el punto de vista institucional.

4 I MÉTODO

La muestra estuvo formada por 224 estudiantes de Psicología de la Universidad de Huelva que habían cursado el primer año la asignatura de Análisis de Datos I y Análisis de Datos II (correspondía al segundo año de estudios), donde se impartían conceptos de: muestreo, estimación de intervalos de confianza y contraste de hipótesis sobre medias y proporciones, así como análisis de varianza y regresión lineal. Los datos fueron recogidos dentro de la asignatura Análisis de Datos II, y los estudiantes participantes estaban habituados a resolver problemas de contraste de hipótesis. Como parte de una evaluación de la asignatura se les propuso el problema que se presenta en Figura 1.

Problema: Se sabe por diversos trabajos de investigación que los niños de seis años tienen una velocidad lectora media de 40 palabras por minuto, con varianza igual a 16. Un profesor quiere saber si los niños de su clase se sitúan o no en la media de palabras por minuto. Para ello mide la velocidad de lectura en los 25 niños de su clase, obteniendo una media de 43 palabras por minuto. Determinar la potencia del contraste si partimos de que el valor que toma la media poblacional bajo la hipótesis alternativa es igual a 42, con nivel de significación 0.05.
Determinar la potencia del contraste si partimos de que el valor que toma la media poblacional bajo la hipótesis alternativa es igual a 42, con nivel de significación 0.05.

Figura 1. Tarea planteada a los estudiantes de la muestra

La tarea fue resuelta por los estudiantes por escrito y en forma individual. Una vez recogidas las respuestas, que son datos textuales, se utilizó el análisis de contenido, una técnica muy utilizada en la investigación educativa (véase, por ejemplo, Cañadas, 2012 ó Gea, 2014). Nosotros la aplicamos a las producciones escritas de los estudiantes. Se hizo un análisis cualitativo una vez recogidos los datos, el mismo consistió en un proceso cíclico e inductivo donde se compararon las respuestas para llegar a una categorización.

En las respuestas correspondientes al problema, el estudiante he de determinar la potencia del contraste, dado un valor de la media poblacional en la hipótesis alternativa y un nivel de significación para el contraste.

Se espera del estudiante que primeramente identifique los datos emergentes del enunciado para poder resolver la tarea. Es decir, se espera que identifique el valor de la media y la varianza poblacional (deduzca de esta la desviación estándar), el tamaño muestral, el valor de la media muestral, reconozca la distribución Normal y el nivel de significación. De la identificación de datos se toman los valores para calcular el estadístico de prueba, es decir: la media poblacional, $\mu_0=40$; la media muestral, $x=43$; la desviación estándar, $\sigma=4$ y el tamaño muestral, $n=25$.

Se clasificaron las respuestas como correctas (*C*), parcialmente correctas (*PC*) e incorrectas (*I*); se encontró un solo tipo de respuesta correcta; las categorías encontradas para las parcialmente correctas han sido tres, donde en general consisten en usar la varianza en lugar de la desviación estándar a la hora de tipificar, incorrecta lectura de la tabla para obtener el percentil o en el cálculo de probabilidades para un intervalo. Se encontraron solo dos categorías para las incorrectas, en algunas se comete error en el cálculo del percentil y estandarización y en otras en el uso de la fórmula del estadístico de prueba y del intervalo para la probabilidad de error tipo II. A continuación se analizan los resultados.

5 I RESULTADOS Y DISCUCIÓN

Análisis semiótico de las respuestas correctas

C. Calcula los extremos del intervalo para obtener la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula y estandariza correctamente. Calcula el valor correcto de la potencia. Reproducimos un ejemplo en la Tabla 1, para ello dividimos la respuesta en tres unidades de contenido donde analizamos cada una de las expresiones generadas por el estudiantes en la columna contenido. Observamos, que el estudiante ha de poner en relación gran variedad de conceptos diferentes, propiedades y procedimientos con su argumentación, y aplicarlos, mediante un proceso de particularización al contexto del problema.

Unidad	Expresión	Contenido
1	Se tipifica $1'96 = \frac{x-40}{\frac{4}{\sqrt{25}}} \rightarrow x = (1'96 \cdot 0'8)+40 = 41'568$ Se tipifican con $\mu = 42$ $-1'96 = \frac{x-40}{0'8} \rightarrow x = (-1'96 \cdot 0'8)+40 = 38'432$	- El alumno identifica los percentiles (±1,96) para calcular los extremos del intervalo de la zona de no rechazo (particularización de un concepto). - Encuentra los extremos de tal intervalo (procedimiento). - Mediante la frase "se tipifican con μ = 42" enuncia que a esos extremos, le restara 42 y dividirá por la desviación de la media muestral (interpretación y cambio de representación).
2	$x = \frac{41'57-42}{0'8} = -0'53$ $x = \frac{38'431-42}{0'8} = -4'46$ Se buscan en la tabla y se restan	- Tipifica con μ = 42 y la desviación estándar de la media muestral los extremos del intervalo hallados en U1 (procedimiento). - Con la frase "se buscan en la tabla y restan", indica que calculará las probabilidades acumuladas a izquierda para -0,53 y -4,46 (campo de problemas-procedimiento).
3	$-0'53 \rightarrow 0'2981$ $-4'46 \simeq 0'0000 - 0'2981 = \beta$ $1-\beta = -0'2981+1 = 0'7019$	- Encuentra los valores de las probabilidades acumuladas en los puntos indicados para U2 (procedimiento), - Resta los valores obtenidos en el orden correcto (propiedad). - Iguala el resultado usando símbolo adecuado para la probabilidad de error tipo II, β (interpretación y cambio de representación). - Resta de la unidad el valor de β, naturaleza complementaria de la potencia (propiedad,definición). Obtiene así la potencia de la prueba.

Tabla 1. Análisis semiótico de una respuesta correcta (C)

En particular debe establecer la relación entre la probabilidad de error tipo II y la potencia de un contraste de hipótesis, y reconocer que ésta también es variable. El alumno ha de comprender que la potencia del contraste es una función cuyos valores cambian a medida que lo hace el valor de la media poblacional bajo la hipótesis alternativa. Por ello no es posible controlar los dos errores a la vez; estos yerros, junto con la potencia del contraste que mide la capacidad del test para rechazar una hipótesis nula falsa, tienen una naturaleza condicional.

Análisis semiótico de las respuestas parcialmente correctas

La complejidad de la tarea da lugar a observar varias categorías de respuestas parcialmente correctas, que describimos a continuación.

PC1. Usa la varianza, en lugar de la desviación típica en la tipificación, comete equivocación en la determinación del percentil. En esta categoría hemos agrupado a todos aquellos estudiantes que no determinan correctamente los extremos del intervalo

para calcular la zona de aceptación de la prueba, usando para estandarizar el valor de la varianza en lugar del de la desviación estándar. Además de ese fallo, no logran calcular adecuadamente los extremos del intervalo para la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula, pues el percentil no es el adecuado. Este fallo lo arrastra a lo largo de toda la tarea y llega a un resultado erróneo pero coherente. En la Tabla 2 realizamos un análisis semiótico de un ejemplo.

Expresión	Contenido
	- Indica los valores que usara para la media poblacional bajo la hipótesis nula y la alternativa (particularización de un concepto). - Representa la función de densidad, e indica un valor erróneo (*conflicto*) de los percentiles. Toma como α/2 0,0025 en lugar de 0,025 (procedimiento). - Otro *conflicto* es utilizar la varianza en lugar de la desviación estándar al estandarizar (concepto-procedimiento). Los valores son correctos de acuerdo con *conflictos* señalados. - Confunde otra vez la varianza con la desviación estándar al tipificar (procedimiento). Las probabilidades acumuladas que encuentra son correctas (operaciones). - Arrastrando los conflictos señalados llega a un valor posible para β (concepto). - Calcula la potencia restando de 1 del valor hallado para β (definición). - Da una respuesta final usando notación en porcentajes (cambio de representación).

Tabla 2. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría PC1

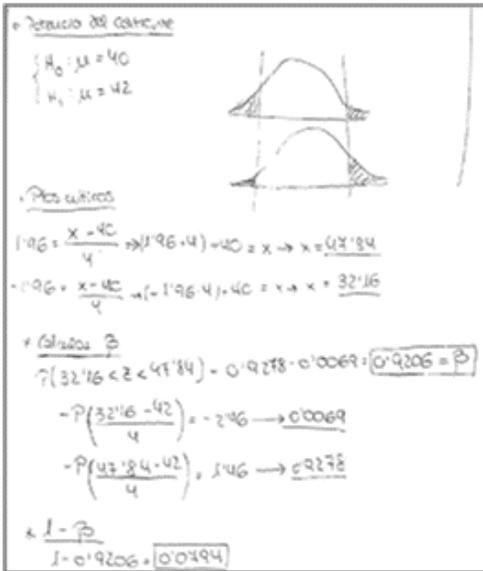
PC2. Error al tipificar al inicio de la tarea y en la desviación típica del estadístico. Estos estudiantes han cometido un fallo solamente al tipificar y el resto de la tarea la resuelve correctamente. En la Tabla 3, analizamos un ejemplo, en que emerge este conflicto, y además los estudiantes no dividen la desviación estándar por la raíz cuadrada del tamaño muestral, error que también cita Alvarado (2007).

Expresión	Contenido
	- Indica los valores que usara para la media poblacional bajo hipótesis nula y alternativa (particularización de un concepto) y representa la función de densidad. - Presenta un *conflicto* al estandarizar; no divide la desviación estándar por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra (propiedad-procedimiento). - Iguala el cálculo de los extremos del intervalo, usando los percentiles correctos, obteniendo valores de los extremos correctos de acuerdo con conflicto señalado (procedimientos). - Repite el *conflicto* al tipificar, ya que no divide la desviación estándar por la raíz cuadrada del tamaño muestral (procedimiento). - El valor de las probabilidades acumuladas que encuentra son correctos (operaciones). - Arrastrando el *conflicto* señalado, arriba así a un valor posible para β (concepto). - Calcula la potencia restando de 1 del valor hallado para (definición).

Tabla 3. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría PC2.

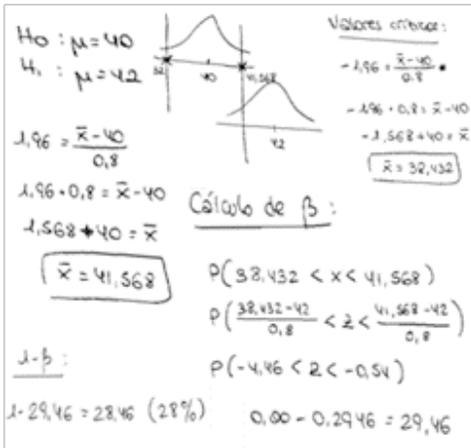
PC3 Calcula la probabilidad en un intervalo cambiando el orden de los extremos, por lo que obtiene una probabilidad mayor que uno. En esta categoría los estudiantes, obtienen los extremos del intervalo para la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula y de estandarizar para determinar la probabilidad de error tipo II correctamente. Al ordenar los valores de las probabilidades lo hace en forma invertida, generando para la probabilidad un valor más grande que la unidad, de donde la potencia del contraste se determina a partir de una cifra incorrecta. En la Tabla 4, realizamos un análisis semiótico de un ejemplo. Se observa que los conflictos están relacionados con el cálculo de probabilidad, o sea es de tipo procedimental. Se muestra desconocimiento de las propiedades fundamentales de la probabilidad, lo que también ocurrió en el trabajo de Contreras (2011).

Expresión	Contenido
	- Indica los valores que usará para la media poblacional bajo hipótesis nula y alternativa (particularización de un concepto) y representa la función de densidad. - Iguala para el cálculo de los extremos del intervalo, y estandariza correctamente, El valor de las probabilidades acumuladas que encuentra son correctos (procedimientos). - Conflicto al calcular la probabilidad para el intervalo (procedimiento), invierte los valores de los extremos, resta mal y obtiene una probabilidad mayor que 1 (definición). - Designa con β a probabilidad de error tipo II (cambio de representación). Calcula la potencia restando de 1 del valor hallado para β (definición). Fuerza un valor positivo tiene un conflicto ya que el resultado es mayor que uno (definición-propiedad).

Tabla 4. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría PC3.

Análisis semiótico de las respuestas incorrectas

I1. Error en el cálculo del percentil y estandarización. En esta categoría hemos clasificado a los estudiantes que han cometido los siguientes fallos: el percentil no es el que corresponde; en la estandarización para el cálculo de la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula usan la varianza en lugar de la desviación estándar; al calcular la probabilidad de error tipo II, no usan el valor consignado en la tarea, sino la media muestral. Finalmente calculan incorrectamente la probabilidad para el intervalo hallado, produciendo un valor mayor que la unidad. De este resultado, luego de restar de uno, obtiene una cantidad negativa para la potencia de la prueba. En la Tabla 5, realizamos un análisis semiótico de esa respuesta.

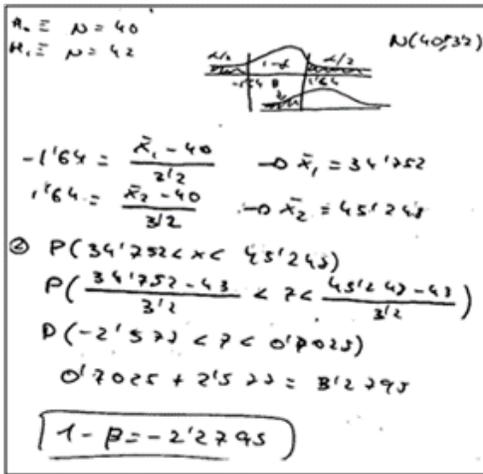
I2. Fórmula del estadístico de prueba y del intervalo para la probabilidad de error tipo II incorrectas. Estos estudiantes no usan la fórmula adecuada del estadístico y estandarizan cometiendo doble fallo para los extremos del intervalo que daría la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula. No es adecuado el procedimiento para determinar la probabilidad de error tipo II, todo lo que redunda en obtener una potencia errónea de la prueba. En la Tabla 6, realizamos un análisis semiótico de la misma.

Expresión	Contenido
	- Especifica los valores supuestos de la hipótesis nula y alternativa en μ=40 y μ=42 y representa la función de densidad. Aparece un *conflicto*, ya que confunde el percentil (particularización de conceptos). - Indica mediante el símbolo "N(40,3´2)" la distribución que usará, generando un *conflicto*, pues no es correcta la desviación estándar (propiedad, procedimiento). - Identifica los percentiles para calcular los extremos del intervalo de la zona de no rechazo (particularización de un concepto). *Conflicto* a pesar que encuentra los extremos de tal intervalo sin fallos (procedimiento), pero arrastrando error. - Otro *conflicto* al especificar que tipificara con el valor de μ=43 para la probabilidad error tipo II (procedimiento-concepto). En la estandarización, usa σ^2 en lugar de σ (propiedad). - *Conflicto*, al obtener una probabilidad mayor que la unidad (procedimiento, propiedad). - Presenta un *conflicto*, ya que obtiene como resultado una potencia con valor menor que 1 (propiedad).

Tabla 5. Análisis semiótico de una respuesta incorrecta I1

Hemos encontrado pocas respuestas totalmente correctas, apenas en un 14,3%, se desprende de la Tabla 7 que probablemente indiquen la complejidad semiótica de esta tarea para cuya solución entran en juego una gran cantidad de conceptos, procedimientos, argumentos; además debe utilizarse un lenguaje muy preciso para arribar a una respuesta correcta en su totalidad.

Hay un más respuestas parcialmente correctas (22,8%), clasificadas en las que confunden varianza con desviación estándar, cometen algún error en la tipificación de variables y tienen algún fallo en cuanto al cálculo de probabilidades que están en juego en la tarea; e incorrectas (19,6%). Los errores están relacionados con la estandarización (al igual que en Olivo, 2008 y Cañadas, 2012), la confusión entre media muestral y poblacional, que también cita Schuyten (1991) (pues tipifica usando el valor de la media muestral y no el de la media poblacional en la alternativa), la elección de la fórmula para el estadístico de prueba y también en el cálculo de probabilidad (error similar al que señala Contreras, 2011). Todos estos casos implican arribar a respuestas incorrectas o no dar respuesta.

Un alto porcentaje (casi 40%, al contabilizar el porcentaje de correctas y parcialmente correctas) conoce el procedimiento para la determinación de la potencia de un contraste, logran luego de seguir una serie de pasos coherentes una respuesta, siendo menos el porcentaje (19,6%) que llegan a una respuesta incoherente que entre otras están en relación con exhibir una probabilidad cuya valor sea mayor que la unidad o negativa, error señalado por Contreras (2011).

Expresión	Contenido
	- *Conflicto*, al usar como probabilidad de error tipo I, su complemento (propiedad-concepto). - Representa la función de densidad en gráficos comparativos (cambio de representación). - Indica la zona de aceptación y rechazo correctamente, separadas por los percentiles (concepto, propiedad y particularización). - *Conflicto* al igualar una probabilidad con el estadístico de prueba (propiedad). - *Conflicto*, ya que no usa la media muestral en la estandarización (procedimiento). - *Conflicto* pues usa la varianza para tipificar (propiedad-particularización). Indica tanto la zona de aceptación y rechazo correctamente, separadas por los percentiles (concepto, propiedad y particularización). - Genera una probabilidad de error tipo II denotando un *conflicto*, que se propaga hacia la potencia mostrada de la prueba (concepto, propiedad y particularización).

Tabla 6. Análisis semiótico de una respuesta incorrecta I2.

Conflictos en el cálculo de la potencia

En el análisis de las respuestas se han encontrado los siguientes conflictos semióticos que han llevado a los alumnos a un cálculo erróneo de la potencia: confunde la varianza y desviación estándar en la tipificación (que aparece en las categorías PC1, PC2; I1 e I2, en total 33,9% de los estudiantes); confusión en el cálculo de probabilidades (que aparece en las categorías PC1, PC3; I1 e I2; en total 34,8% de los estudiantes). Lleva a probabilidades incorrectas, a veces mayores que la unidad; confusión para el cálculo de percentiles (aparece en las categorías PC2 e I1; en total un 9,8% de estudiantes). No hemos encontrado descrito en la literatura estos conflictos: no usan la distribución de la media muestral en el cálculo del estadístico de prueba (aparece en las categorías PC2, en total en 1,8% de estudiantes) y mantiene una confusión entre media muestral y poblacional (aparece en las categorías I1 e I2, en total un 11,1% de estudiantes).

	Categorias	Frecuencia	%
C	Correcta	32	14,3
PC1.	Error en tipificación, usando la varianza en lugar de desviación al estandarizar, e incorrecto el percentil	47	21,0
PC2.	Error en la tipificación y no divide por el tamaño de muestra	4	1,8
PC3.	Intercambia los extremos al calcular probabilidad en un intervalo.	6	2,7
I1.	Errado percentil, mal la estandarización, vuelve a tipificar usando $\bar{x}$ (43).	18	8,0
I2.	Error en formula de estadístico de prueba y del intervalo para la P(ETII).	7	3,1
I3.	No relacionadas con la tarea.	19	8,5
S/R		91	40,6
	Total	224	100,0

Tabla 7. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas para la potencia del contraste

REFERENCIAS

ALVARADO, Hugo. **Significados del teorema central del límite en la enseñanza de la estadística en ingeniería**. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada, España. 2007

BATANERO, Carmen. **Controversies Around the Role of Statistical Tests in Experimental Research,** Mathematical Thinking and Learning, 2:1-2, 75-97, 2000. DOI: 10.1207/S15327833MTL0202_4, 2000.

CAÑADAS, Gustavo. **Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología**. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada, España. 2012.

CONTRERAS, José Miguel. **Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional**. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada, España. 2011

DÍAZ-BATANERO, Carmen, et al. **La controversia sobre el contraste de hipótesis: Situación actual en psicología y recomendaciones didácticas**. 2019.

GEA, Magdalena. **La correlación en Bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de futuros profesores**. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España, 2014.

GODINO, Juan. **Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas**. Universidad de Granada. Online: www.ugr.es/local/jgodino/, 2014

GODINO, J. D.; BATANERO, C. y FONT, V. **The onto-semiotic approach researchin mathematics education**. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135. 2007

LÓPEZ MARTÍN, María Del Mar, et al. **Análisis de los errores de aplicación de la inferencia estadística**. 2019.

OLIVO, Eusebio. **Significados del intervalo de confianza en la enseñanza de la ingeniería en México**. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada, España. 2008

SCHUYTEN, G. **Statistical thinking in psychology and education**. En D. Vere-Jones (Ed.). Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics (pp. 486-490).Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Online: http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php. 1991

VALLECILLOS, Angustias. **Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios**. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España. 1994.

VERA, O; DÍAZ, C. y BATANERO, C. **Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología**. UNION: Revista Iberoamericana de Educación Estadística, Nº 27, p.41-61. ISSN: 1815-0640. 2011.

VERA, Osmar Darío; BATANERO, María Carmen Díaz. **Dificultades de estudiantes de psicología en relación al contraste de hipótesis.** *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, 2013, no 2, p. 197-203.

CAPÍTULO 5

ESTUDO DOS FRACTAIS NAS SÉRIES E CÁLCULO NUMÉRICO

Data de aceite: 02/05/2022

Eduarda Maschio Belarmino
Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Paraná, Brasil

Dione Ines Christ Milani
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Paraná, Brasil

Gustavo Henrique Dalposso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Paraná, Brasil

RESUMO: Este artigo apresenta uma revisão bibliográfica a respeito de sistemas não lineares, fractais e séries. O estudo destes assuntos se mostrou essencial para uma melhor compreensão dos conteúdos abordado nas disciplinas de Cálculo 3 e da disciplina de Cálculo Numérico. O estudo de fractais é de extrema importância para toda a ciência, que hoje pode compreender com muito mais clareza formas geométricas - encontradas na natureza - que já foram ditas como anomalias. O método de pesquisa foi a quantitativa básica exploratória. Como resultado, foi observado a importância de uma boa base em métodos matemáticos, apresentados em Cálculos 1, 2 e 3 e Cálculo Numérico, para o desenvolvimento de tais descobertas matemáticas. Conclui-se que o estudo dos fractais se mostra essencial para compreensão da ordenação geométrica presente no Universo e abre caminhos para muitas pesquisas em diversos setores da Ciência.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas não lineares, séries, Cálculo Numérico, Cálculo 1, 2 e 3, interdisciplinaridade.

STUDY OF FRACTALS IN SERIES AND NUMERICAL CALCULATION

ABSTRACT: This paper presents a bibliographic review of nonlinear systems, fractals and series. The study of these subjects has proved to be essential for a better understanding of the content covered in the Calculus 3 and Numerical Calculus courses. The study of fractals is extremely important for all of science, which today can understand with much more clarity geometric shapes - found in nature - that were once said to be anomalies. The research method was basic exploratory quantitative. As a result, it was observed the importance of a good foundation in mathematical methods, presented in Calculus 1, 2 and 3 and Numerical Calculus, for the development of such mathematical discoveries. It can be concluded that the study of fractals is essential to the understanding of the geometric ordering present in the Universe and opens the way to many researches in several sectors of Science.

KEYWORDS: Nonlinear systems, series, Numerical Calculus, Calculus 1, 2 and 3, interdisciplinarity.

1 | INTRODUÇÃO

> *"Aqueles que ouvem falar de curvas (irregulares) em tangentes, ou de funções sem derivadas, pensam frequentemente que a natureza não apresenta tais complicações, e nem mesmo as sugere. O contrário, contudo,* é *verdadeiro, e a lógica dos matemáticos manteve-os mais próximos da realidade do que as representações empregadas pelos físicos (...)"*
>
> (Perrin - começo do século XX)

Diversas culturas divinizaram a ciência da formação da natureza, pois ela possui o princípio da criação de todas as coisas. A Geometria foi considerada sagrada, pois ela é uma expressão da natureza, então estes padrões são padrões literalmente da criação das formas, por isso foram associadas ao divino – a criação. Os fractais formam uma extensa base da geometria sagrada, pois através deles foi possível se entender formas que até o momento da história não tinham uma ordem de formação.

Conforme Mandelbrot (1989), a geometria fractal descreve melhor os fenômenos naturais por fazer uso de seu caráter qualitativo, por visualizar as questões globalmente e contemplar as inter-relações subjacentes.

> Na atualidade os estudos sobre os fractais, em especial acerca da dimensão fractal, vêm sendo utilizada em distintas áreas do conhecimento humano, principalmente na utilização de estudos de sistemas caóticos, como no padrão das formações de nuvens e no mercado financeiro. Além da utilização na medição de comprimento de curvas, analise e reconhecimento de padrões de imagens, caracterização de objetos e análise de texturas. (NUNES, 2011)

Iniciamos os estudos com a seguinte pergunta: como relacionar Cálculo 3 com Cálculo Numérico?

O objetivo do artigo é relacionar os estudos de Cálculo Numérico com os estudos de Cálculo 3, além de interpretar e comentar sobre as conclusões ao decorrer da elaboração deste artigo.

2 | SISTEMAS NÃO LINEARES

> Alguma vez você já se perguntou por que quando olhamos o mundo natural ao nosso redor vemos poucas linhas retas, mas ainda assim elas são onipresentes nos sistemas que desenhamos, afinal de edifícios a placas de circuito, elas parecem ser sempre a opção padrão. Uma maneira de entender isso é que os sistemas que desenhamos baseiam-se em uma compreensão científica e matemática do mundo, que inevitavelmente começou por descrever os temas mais simples e mais ordenados, ou seja, aqueles que são compostos de formas e relações lineares. De Euclides A Newton, a ciência tem se concentrado nos sistemas ordenados de triângulos, retângulos perfeitos e relações lineares de causa e efeito que podem ser codificadas em equações compactas. Um exemplo de não linearidade pode ser estar ouvindo duas de suas músicas favoritas ao mesmo tempo, porque existe uma relação de interferência entre elas, os resultados da experiência não serão uma equação

simples de adicionar o prazer de ouvir a cada uma independentemente. Assim descrevemos o mundo real como uma espécie de aproximação a estas formas lineares perfeitas. (SAVI, 2006)

As funções de interação são um conceito importante dentro da ciência de não linearidade, e foram usadas para criar um novo tipo de geometria denominada geometria fractal, na qual a interação de uma função simples gera padrões de aparência orgânica irregular que podem modelar muitas das formas geométricas que vem da natureza como por exemplo estruturas de Conchas e formação acidentadas de montanhas. A não linearidade em todas as suas formas, é o coração de muitos dos Desafios do Século 21 para ciência. Principalmente quando tentamos ampliar o nosso científico para além da sua dependência da teoria dos sistemas lineares, de forma a encontrar novas maneiras de abraçar o mundo complexo em que vivemos em seus próprios termos irregulares e imperfeitos. (SAVI, 2006)

3 | FRACTAIS

Na década de 60, Benoit Mandelbrot, começou a estudar alguns conjuntos irregulares na natureza - caracterizados por serem sistemas não lineares – como galáxias e flocos de neve. Ele conseguiu perceber certos padrões nas irregularidades apresentadas por formas e assim sentiu a necessidade de encontrar um nome para descrever a geometria com que buscava representar as reais formas da natureza. (SANTOS, 1993)

Resumidamente, um fractal é um objeto que não muda sua forma à medida em que a escala é alterada, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original. Isto não é o que ocorre com uma circunferência, que reduz a sua curvatura à medida em que é ampliada.

Segundo Murr et al. (2003) a definição dada por K. J. Falconer para ser considerado um Fractal ele precisa possuir todas (ou pelo menos a maioria) das seguintes características:

- Estrutura fina, independente da escala: consiste em detalhamento sucessivo. Infinitas ampliações levam a constantes detalhes, indefinidamente. Nos fractais a cada ampliação aparecem mais detalhes, e o processo pode ser repetido indefinidamente. Para fractais construídos em tela gráfica, os detalhes aparecerão nas ampliações sucessivas, até onde o computador suportar a realização dessas ampliações.

- Não pode ser descrita por uma função analítica simples ou em linguagem geométrica tradicional: o fractal é construído através de processos iterativos, sendo impossível representá-lo por uma função simples.

- Possuir auto-similaridade ou auto-afinidade, mesmo que seja estocasticamente: a auto-similaridade, constitui-se na obtenção de réplicas menores da figura através de sua divisão ou ampliação. Se as réplicas são sempre iguais e obtidas de um fator de redução comum, conclui-se que a figura possui auto-similaridade estrita. Já na auto-afinidade, há figuras obtidas através de transformações afins, isto é, figuras afins.

- A dimensão Fractal deve ser estritamente maior que a sua dimensão topológi-

ca: a dimensão Fractal é o espaço que a figura ocupa.

Segundo Fuzzo (2009), os fractais podem ser agrupados em três categorias principais, estabelecida pelo modo como o fractal é formado ou gerado: sistema de funções iteradas, fractais definidos e fractais aleatórios. Os fractais também podem ser classificados por sua auto-similaridade. Existem três tipos de auto- similaridade encontrados em fractais: auto-similaridade exata, quase-auto-similaridade e auto-similaridade estatística.

4 | FRACTAIS EM SÉRIES

Algumas séries são conhecidas como séries infinitas, porém o infinito é um grande problema para a física. Imaginar algo que seja infinito em um espaço determinado (universo), parece impossível. Mas isso pode ser explicado pelos fractais, pois ele se repete, em infinitas escalas, em um espaço determinado. Portanto o estudo dos fractais pode abrir novas portas para o entendimento do infinito.

5 | RESULTADOS

Como resultado de nossa pesquisa inicial - como relacionar Cálculo 3 com Cálculo Numérico - descobrimos os fractais, que se relacionam por serem um sistema não linear e derivarem de uma série. Um fractal é sistema no qual a interação de uma função simples gera padrões de aparência orgânica irregular que se modelam como formas geométricas da natureza, além de se derivar de uma série, que se deriva da soma de sequências, como por exemplo a sequência de Fibonacci, que através de suas sucessões é encontrada no fractal da concha de caracol do mar - essa forma geométrica se assemelha as linhas do campo vetorial de um grande problema da física clássica, a turbulência -. Ao final da pesquisa ficou evidente a necessidade dos conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Cálculo Numérico e Cálculo 3 para o desenvolvimento da ciência e para resolução de problemas pertinentes.

6 | CONCLUSÃO

Segundo ASSIS (2008), o conceito de dimensão fractal vem sendo utilizado em diversos campos: na medicina, na detecção de núcleos atípicos, na mineralogia, na linguística, na biologia, na indústria, no solo, na chuva, na economia, na ecologia, na computação, entre outros.

Com o estudo dos fractais poderemos desmistificar, por exemplo, a turbulência, que foi considerada por Richard Feynman como o problema mais importante ainda não resolvido da física clássica, não sabemos nem mesmo exatamente o que é turbulência, ou como ela funciona, e estamos bem longe de conseguirmos uma equação que possa descrever esse fenômeno. Os fractais podem ser a chave para desenvolver-se algoritmos que possam prever turbulência na prática, computacionalmente, uma vez que possuem

forte semelhança com os espirais de Fibonacci, que geram fractais, como os da Figura 1. Assim teremos previsões de tempo com menos erros, testes de túneis de vento poderão ser substituídos por testes computacionais, barateando o seu custo, utilizando da junção de conhecimentos de Cálculo 3 e Cálculo Numérico.

Figura 1 – Fractal em espiral - caracol

Fonte: REYES (2011)

REFERÊNCIAS

ASSIS, Thiago Albuquerque de; MIRANDA, José Garcia Vivas; *et al*. Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Scielo Brasil,** Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia. Salvador, BA, Brasil. Revista brasileira de ensino de física, v. 30, n. 2. 2008. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/NkxTkgKJJdBX6Zy95zWHZkG/?lang=pt. Acesso em: 15 de agosto de 2021.

ARAUJO, Juscimar da Silva; ALVES, Giovana; *et al*. O Infinito: Compreensões Que Perpassam Teorias, Ensino E Aprendizagem. **Revista paranaense de educação matemática.** Campo mourão. p. 279-305. 2020. DOI https://doi.org/10.33871/223858. Disponível em: http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/737. Acesso em 13 de agosto do 2021.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a geometria fractal - Para a sala de aula**. Autêntica Editora: coleção tendências em educação matemática, 3ª edição. 2016.

DUARTE, Lucas Rodrigues. **Elementos de sequências e séries infinitas**. Editora Simplissimo Livros Ltda. Belo Horizonte-Brasil. 2018. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=Q757DwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA3&dq=s%C3%A9ries+que+divergem+para+o+infinito&ots=NHa289XjtA&sig=tzE4gDJ_RMS5dP6c3j4Fxcl08BM#v=onepage&q=s%C3%A9ries%20que%20divergem%20para%20o%20infinito&f=false. Acesso em 14 setembro 2021.

Experimento A0: Fractais. **Universidade Federal do Espírito Santo,** Departamento de Física – CCE, Física Experimental Roteiro. Disponível em: https://fisica.ufes.br/sites/fisica.ufes.br/files/field/anexo/roteiro_com_artigoderevisao_0.pdf. Acesso em 17 de agosto de 2021.

FUZZO, Regis Alessandro; REZENDE, Veridiana; *et al*. Fractais: Algumas Características E Propriedades. **IV Encontro de Produção Científica e Tecnológica –EPCT.** Núcleo de Pesquisa Multidisciplinar. Faculdade Estadual de Ciência e Letras de Campo Mourão. 2009. Disponível em: http://www.fecilcam.br/nupem/anais_iv_epct/PDF/ciencias_exatas/10_FUZZO_REZENDE_SANT OS.pdf. Acesso em 25 de agosto de 2021.

MANDELBROT, Benoit. **Objectos fractais**. Editora Ciência Aberta Gradiva. Tradução Carlos Fiolhais e José Luís Malaquias Lima, 3. ed. Lisboa. 1998.

MANDELBROT, Benoit. **The Fractal Geometry of Nature.** Nova Iorque. Editora: Times Books, W.H. Freeman and Company. 1975.

MEIRELES SENA, Maxwell. Uma proposta de ensino da geometria fractal para o 9º ano do ensino fundamental. **Universidade Do Estado Do Amazonas.** Manaus. 60 p. 2018. Disponível em http://repositorioinstitucional.uea.edu.br/handle/riuea/1397. Acesso em 15 de agosto de 2021.

NUNES, João Cavalcante; SILVA, Julizete da; *at al*. Fractais: uma análise da importância desse conhecimento geométrico para a humanidade. **Faculdade Madre Tereza**. Santana-AP. 2011. Disponível em: https://www.webartigos.com/storage/app/uploads/public/588/508/32b/58850832b07d9133614671.pdf. Acesso em 5 de setembro de 2021.

NUSSENZVEIG, H. M. (organizador). Complexibilidade e Caos. **Revista Brasileira de Ensino de Física,** vol. 22, no. 2. Editora UFRJ/COPEA. Rio de janeiro. 1999. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v22_148.pdf. Acesso em 23 de agosto de 2021.

RABAY, Yara Silvia Freire. Estudo e Aplicações da Geometria Fractal. **Repositório Institucional da Universidade Federal da Paraíba,** Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. João Pessoa/BA. 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7651. Acesso em 21 de agosto de 2021.

REYES, Alejandro. **Espiral Caracol.** Fractal Poster. 2011. Disponível em: https://www.fractalposter.com/fractals/espiral_caracol_p-2208.html. Acesso em 9 de setembro de 2021.

SANTOS, Lúcio Tunes dos. **Sistemas não Lineares e Fractais.** Matemática Universitária, nº15. Páginas 102-116. 1993.

SAVI, Marcelo Amorim. **Dinâmica não-linear e Caos.** Editora e-papers. Cap. 1, p. 25-49. Rio de Janeiro. 2006. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=AlKIjK9zz0oC&oi=fnd&pg=PA21&dq=Sistema+n%C3%A3o+linear+(Sistema+din%C3%A2mico+n%C3%A3o+linear)&ots=iknFKz37Bf&sig=cyRcDeO_mORukrJahScrEm7EmuY#v=onepage&q&f=true. Acesso em: 19 agosto 2021.

CAPÍTULO 6

O USO DA COMPUTAÇÃO GRÁFICA NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 08/04/2022

Guilherme Porto
Instituto Federal Farroupilha, Campus São Borja
São Borja – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/5735653099270140

Débora Marília Hauenstein
Universidade Federal de Pelotas, Faculdade de Educação
Pelotas – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/3461042376308753

André Luis Andrejew Ferreira
Universidade Federal de Pelotas, Faculdade de Educação
Pelotas – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/0257799779736390

RESUMO: Este trabalho aborda as práticas didáticas que utilizam tecnologias digitais de informação e comunicação para auxiliar no processo do ensino. Em particular, propõe que o software de geometria dinâmica educacional *GeoGebra* seja utilizado no ensino da Geometria Analítica, utilizando suas aplicações na computação gráfica como recurso motivacional para o desenvolvimento dos estudos. A argumentação é sustentada por uma pesquisa bibliográfica fundamentada nos livros *Integração das Tecnologias na Educação* e *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*, e em periódicos científicos que tratam do ensino da geometria analítica através do *GeoGebra* e do uso da computação gráfica, e outros recursos tecnológicos, no contexto educacional. Ao longo das seções apresentam-se discussões sobre a problematização do uso das tecnologias em sala de aula, sobre as potencialidades do *GeoGebra* no estudo da geometria analítica e sobre como a computação gráfica pode ser utilizada como ferramenta pedagógica. Espera-se que o uso da ferramenta proporcione a expansão do pensamento na compreensão de conceitos de Geometria Analítica.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Matemática. Geometria Analítica. GeoGebra. Tecnologia na Educação. Computação Gráfica.

THE USE OF COMPUTER GRAPHICS IN THE TEACHING OF ANALYTICAL GEOMETRY

ABSTRACT: This work addresses the didactic practices that use digital information and communication technologies to assist in the teaching process. In particular, it proposes that the GeoGebra educational dynamic geometry software be used in the teaching of Analytical Geometry, using its applications in computer graphics as a motivational resource for the development of studies. The argument is supported by a bibliographical research based on the books Integration of Technologies in Education and Phases of Digital Technologies in Mathematics Education: classroom and internet in movement, and in scientific journals that deal with the teaching of analytical geometry

through GeoGebra and the use of of computer graphics, and other technological resources, in the educational context. Throughout the sections, discussions are presented on the problematization of the use of technologies in the classroom, on the potential of GeoGebra in the study of analytical geometry and on how computer graphics can be used as a pedagogical tool. It is expected that the use of the tool will provide the expansion of thought in the understanding of Analytical Geometry concepts.
KEYWORDS: Teaching Mathematics. Analytical Geometry. GeoGebra. Technology in Education. Computer Graphics.

1 I INTRODUÇÃO

A geometria analítica é uma disciplina fundamental dos cursos de ensino superior, visto que permite construções de elementos estruturais da matemática que estão associados com algumas importantes aplicações do Cálculo Diferencial e Integral. A computação gráfica, presente em expressões artísticas, mídias de entretenimento, engenharias e arquitetura, está fundamentada nesse conteúdo, demostrando sua relevância em campos de interesses profissionais e populares (LISEIKIN, 2017). Mesmo assim, podemos notar o desinteresse dos estudantes pelo conteúdo, como observado por Souza (2016) nas turmas de Geometria Analítica da Universidade Federal de Roraima. Tal fato não é um evento isolado, já que essas dificuldades de aprendizado são constatadas por pesquisadores em diferentes níveis de ensino e regiões (MOTA; LAUDARES, 2010).

No curso de geometria analítica, muitos alunos demonstram preocupações excessivas com os cálculos algébricos, mas não conseguem associar as expressões com suas representações visuais. Sendo assim, uma das principais dificuldades da aprendizagem desse conteúdo está na fragilidade da visualização dos discentes, e acredita-se que isso possa ocorrer devido à realização de aulas que utilizam apenas a lousa como ferramenta visual, restringindo os recursos pedagógicos que poderiam incrementar o ensino (MOURA; SANTOS; SILVA, 2016; SOUZA; FONTES; BORBA, 2019).

Com o intuito de sanar alguns dos problemas de aprendizado em geometria analítica defende-se que é preciso modernizar as práticas de ensino. Metodologias que utilizem Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) podem auxiliar no processo de ensino de geometria por ampliar, de maneira intuitiva, a habilidade de visualização de suas relações com a álgebra e motivar o estudo dos conteúdos por meio de recursos e aplicações computacionais (SOUZA; FONTES; BORBA, 2019).

O software *GeoGebra* possui potencial pedagógico para contribuir com o ensino da geometria analítica por meio de sua interface dinâmica que permite a manipulação interativa de elementos geométricos e algébricos. Observamos a possibilidade de reproduzir construções da computação gráfica, tal assunto pode despertar o interesse do aluno em compreender como os conteúdos vistos em sala de aula podem ser utilizados no contexto prático e preparar o mesmo para lidar com seus usos cotidianos e profissionais.

Neste trabalho, defendemos o ensino da geometria analítica no ensino superior articulado com a utilização das TDIC. Para isso apresentamos as vantagens da inclusão das tecnologias no contexto educacional articulado com os referenciais dos livros *Integração das Tecnologias na Educação* (VALENTE, 2005); e *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento* (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015). Os estudos de Souza, Fontes e Borba (2019) e Hohenwarter (2015) demonstram as potencialidades pedagógicas do software *GeoGebra* para o ensino da geometria analítica. Por fim, mostramos como a computação gráfica pode contribuir com a atividade docente, como argumentado por Battaiola, Elias e Domingues (2002).

O restante do trabalho está organizado como segue. Na próxima seção, apresentamos de forma sucinta a metodologia utilizada. Depois, discutimos as potencialidades das TDIC nos processos de ensino e aprendizagem, em particular para o ensino da matemática. Em seguida, apresentamos as vantagens do *GeoGebra* no ensino da geometria analítica e como seus recursos podem ajudar nos problemas visualização dos alunos. Após, apresentamos como a computação gráfica pode ser usada como ferramenta pedagógica. Por fim, traçamos algumas conclusões sobre as propostas para o ensino da geometria analítica com o *GeoGebra* e apresentamos os possíveis trabalhos futuros.

2 | METODOLOGIA

Sustentamos a argumentação deste artigo por meio de uma pesquisa bibliográfica elaborada com base nos procedimentos de Santos (2005), onde selecionamos fontes que garantam uma visão geral sobre o tema e um enfoque dos pontos principais. Analisamos artigos científicos que abordassem o ensino de geometria analítica através do *GeoGebra* e o uso da computação gráfica e das TDIC no contexto educacional. Dedicamos esta pesquisa a explorar questões sobre como as tecnologias estão sendo aplicadas no contexto educacional, investigamos as práticas já utilizadas para o ensino da geometria analítica com o recurso *GeoGebra*, e o valor da computação gráfico como recurso motivacional para o desenvolvimento dos conteúdos.

Dentre as referências investigadas destacamos os livros Integração das *Tecnologias na Educação* (VALENTE, 2005); e *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento* (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015), além do periódico *Sisyphus - Journal of Education* (SOUZA; FONTES; BORBA, 2019).

3 | A TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO

O surgimento de novas tecnologias influencia na forma como vivemos e, portanto, deve ser integrado ao processo de ensino, pois conecta a realidade escolar e os conteúdos trabalhados em aula com o cotidiano do aluno, tornando o aprendizado mais significativo (MOURA; SANTOS; SILVA, 2016). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) também

destacam a relevância da utilização da informática nos processos educativos, algumas das vantagens por eles citadas são aumentar as habilidades dos alunos referentes à escrita, à leitura, à visão, à audição e à criação, proporcionando aos educandos diferentes formas de aprendizagem e comunicação (BRASIL, 1998). Sendo assim, é proveitoso utilizar as tecnologias como recurso didático.

No entanto, Burke (2004) aponta que a evolução da tecnologia transforma a sociedade, modificando seus diversos segmentos até ser absorvida pela a atividade educativa. Logo, assim como diversos instrumentos didáticos foram estudados para serem aperfeiçoados, também é necessário problematizar o uso de tecnologias como ferramentas de ensino.

Uma atualidade permeada por tecnologias exige que os alunos adaptem sua maneira de pensar e agir, para que isso ocorra é preciso desenvolver uma postura proativa, crítica e autônoma, assim, uma educação que é centrada no professor como único detentor de conhecimento se mostra ineficaz para atender as demandas da sociedade moderna (VALENTE; ALMEIDA; GERALDINI, 2017). Nesse sentido, destacamos que as metodologias que utilizam TDCI podem modernizar as práticas educativas, pois modificam a postura dos educandos, tornando-os ativos no processo de aprendizagem e fazendo-os realizar investigações e formular hipóteses sobre os problemas estudados (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015).

É preciso destacar que apenas computadores não são suficientes, é necessário que estejam articulados em propostas pedagógicas que permitam a construção efetiva do conhecimento (FERNANDES, 2004). Para que as práticas educativas produzam um aprendizado significativo, Valente (2005) cita que é necessário que exista um domínio técnico das TDIC aliado ao pedagógico, afirmando que "o domínio das técnicas acontece por necessidade e exigência do pedagógico e as novas possibilidades técnicas criam novas aberturas para o pedagógico, constituindo uma verdadeira espiral de aprendizagem" (VALENTE, 2005, p.1).

O professor deve escolher o software com as especificidades que se adequem à sua proposta pedagógica, assim, ele deve estabelecer os objetivos a serem atendidos ao ensinar para que a sua sequência didática se desenvolva da melhor forma, propiciando ao aluno um ambiente de aprendizagem, já que, se o professor está ciente das possibilidades oferecidas pelo software ele pode articulá-las com suas intenções de ensino, criando oportunidades exploratórias para os educandos (VALENTE, 2005).

As tecnologias estão cada vez mais presentes no ensino da Matemática, uma vez que são utilizados como ferramentas didáticas que auxiliam o aluno a vencer obstáculos para o entendimento de conceitos abstratos. Os recursos gráficos permitem que o educando visualize informações que não poderiam ser representadas em uma lousa, reduzindo dificuldades de entendimento. Sendo assim, destacamos a importância da realização de práticas pedagógicas que utilizem softwares gráficos interativos que facilitem a visualização

dos objetos de estudo (MOURA; SANTOS; SILVA, 2016).

4 I O SOFTWARE GEOGEBRA ARTICULADO AO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

O software *GeoGebra* foi criado por criado por Markus Hohenwarter com o intuito de ser usado em práticas de ensino. O programa é voltado para geometria dinâmica e possui ferramentas que relacionam elementos da geometria e álgebra, permitindo o estudo da geometria analítica, pois garante que a visualização geométrica esteja associada ao cálculo algébrico (SOUZA; FONTES; BORBA, 2019).

A Geometria Analítica estabelece conexões entre tópicos da geometria e da álgebra, tratando de problemas que abordam as soluções de um sistema linear de duas incógnitas por meio retas e planos, a exibição de figuras que podem ser descritas por equação, entre outros. O software *GeoGebra* é propício para o desenvolvimento desse estudo por proporcionar a dupla correspondência entre objetos, ou seja, cada expressão disposta na janela algébrica corresponde a um objeto na janela gráfica. Dessa forma, o aluno pode investigar os elementos algébricos identificando-os com suas representações geométricas, possibilitando verificações e análises conforme as expressões algébricas são alteradas e facilitando a compreensão do conteúdo (HOHENWARTER, 2015).

Souza (2016) realizou um estudo na Universidade Federal de Roraima (UFRR) onde o software *GeoGebra* foi usado no ensino das disciplinas de geometria analítica, onde constatou-se que, nos contatos iniciais com o software, os alunos demonstraram interesse na aprendizagem do conteúdo. Quando considerado o desempenho das turmas, houveram melhorias nos índices de aprovação e evasão, o que pode ser considerado um fortalecimento da aprendizagem e da motivação para permanecer no curso. Em outra investigação semelhante na UFRR, em que o programa foi utilizado na produção de vídeos por parte dos discentes matriculados nas disciplinas de geometria analítica, foi possível notar uma melhor exposição na apresentação dos conceitos matemáticos, principalmente na verificação de teoremas relativos aos conteúdos, evidenciando um melhor entendimento do assunto desenvolvido (SOUZA; FONTES; BORBA, 2019).

Borba, Silva e Gadanidis (2015) apontam que os elementos gráficos do software *GeoGebra* permitem a reprodução de problemas contextualizados com a realidade do aluno, além disso, a interatividade da ferramenta possibilita que ele explore esse recurso e fundamente a construção de seu aprendizado. Por meio do programa os estudantes desenvolvem uma visão diferenciada da Geometria Analítica, adquirindo as habilidades e competências necessárias, estimulando a construção do processo dedutivo, melhorando o uso da linguagem matemática, enriquecendo a comunicação de ideias matemáticas, aumentando o interesse pelo conteúdo, desenvolvendo a perícia para a visualização gráfica de elementos algébricos e, consequentemente, aprimorando seu conhecimento e

entendimento sobre a disciplina.

5 I COMPUTAÇÃO GRÁFICA COMO MOTIVAÇÃO

Alguns dos principais softwares educacionais exploram a potencialidade de visualizações gráficas como ferramenta de ensino, sendo cada vez mais frequentes as aplicações da computação gráfica como recurso motivacional para despertar o interesse de um aluno. Estamos em constantemente contato com mídias produzidas por ferramentas da computação gráfica, basta perceber que praticamente todo comercial ou filme está repleto de imagens projetadas e efeitos especiais. A relevância desses elementos no cotidiano faz com que o discente fique atraído pelo tema e, dessa forma, se interesse pela abordagem acadêmica do mesmo.

A capacidade de processamento computacional permite o desenvolvimento de elementos gráficos interativos que podem ser utilizados no contexto educacional para produzir materiais de ensino e aprendizagem que facilitem o acesso e o entendimento dos conteúdos. As atividades desenvolvidas com esses recursos vão desde construções gráficas simples até projetos elaborados com tecnologias inovadoras de realidade aumentada. Sendo assim, é de interesse que professores tenham algum domínio sobre o conteúdo, no entanto, ainda são poucos os ambientes para essa formação profissional (BATTAIOLA; ELIAS; DOMINGUES, 2002).

A Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) oferece cursos de formação acadêmica e profissional sobre computação gráfica por meio do portal ARAMIS (Ambiente de Aprendizagem de Computação Gráfica a Distância). Diversos softwares com potencial didático são estudados, como *AutoCad 2D*, *AutoCad 3D*, *WorkCad*, *CorelDraw* e *PhotoShop*. As aulas não são exclusivamente focadas no ensino técnico para manipulação de imagens, mas em conceitos básicos e algoritmos consolidados que habilitam o uso das ferramentas de modo simples e visual, facilitando o entendimento (UFRGS, 2007).

O ensino de diversas disciplinas, inclusive das geometrias, necessita de constantes representações visuais para que os conceitos trabalhados de forma teórica possam ser compreendidos na prática. No entanto, nem sempre o uso de uma imagem permite o entendimento adequado de um assunto, visto que ela pode não fornecer todos as informações necessárias devido a suas limitações. Nesse sentido a computação gráfica se torna imprescindível para construção e ambientes virtuais com representações visuais dinâmicas, onde o aluno pode interagir e manipular o objeto estudado, realizando observações e experimentos que auxiliem na formação desse conhecimento (BATTAIOLA; ELIAS; DOMINGUES, 2002).

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo defender o ensino da geometria analítica no ensino superior, por meio do software *GeoGebra*, contextualizado com suas aplicações na computação gráfica através de um levantamento bibliográfico sobre as potencialidades do uso pedagógico dessa ferramenta na estruturação de relações entre a álgebra e a geometria que permitam a construção do conhecimento, as considerações para a inclusão das TDIC no processo de ensino-aprendizagem, e os recursos motivacionais que podem ser empregados pelo viés prático da computação gráfica.

Diversos autores corroboram que a influência que as novas tecnologias exercem sobre o cotidiano deve ser transmitida para o ambiente escolar para que possa ser adequadamente apropriada pelos educandos. Diversas experiências já aconteceram nesse sentido, no entanto, ainda existe muito que ser problematizado sobre a melhor forma de utilizar recursos computacionais como ferramentas didáticas sendo inegável que a atuação docente para a produção de atividades desempenha o papel principal.

O *GeoGebra* já foi tema de muitas reflexões e discussões sobre o uso de softwares de geometria dinâmica para o ensino da matemática e segue constantemente ganhando espaço em salas de aula e práticas didáticas, sendo que diversos experimentos já foram realizados para contribuir com esse estudo. Acreditamos que a adição da computação gráfica nas abordagens desenvolvidas com o programa pode ser um incremento valioso para atrair o interesse dos educandos pelo conteúdo, ao mesmo tempo que constitui uma nova ferramenta para auxiliar na prática docente e na produção de ambientes virtuais de aprendizado com maior potencial pedagógico.

Os argumentos e estudos apresentadas ao longo desse trabalho reforçam a importância da modernização das metodologias de ensino da matemática por meio da inclusão das novas tecnologias, em particular, discutimos a utilização do *GeoGebra* no ensino da geometria. Para continuar contribuindo com essa temática, pretendemos utilizar o conteúdo dessa revisão bibliográfica para fundamentar a produção de uma prática didática que utilize o *GeoGebra* para abordar a construção de malhas e sistemas de coordenadas utilizados para construção de modelos computacionais gráficos, tal atividade será aplicada em turmas de ensino superior e constitui parte dos estudos futuros do atual projeto de mestrado da segunda autora.

REFERÊNCIAS

BATTAIOLA, A. L.; ELIAS, N. C.; DE GODOY DOMINGUES, R. **Um software para ensino de conceitos de computação gráfica. Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância**, Liberdade/SP, v. 1, ago. 2002.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2021.

BURKE, P. **Testemunha ocular: história e imagem**. São Paulo: Edusc, 2004.

FERNANDES, N. L. R. **Professores e computadores: navegar é preciso**. Porto Alegre: Mediação, 2004.

HOHENWARTER, M. **Geogebra 4 Quickstart**. 2007. Disponível em: <http://static.geogebra.org/help/geogebraquickstart_pt_PT.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2021.

LISEIKIN, V. D. **Grid Generation Methods**. New York: Springer, 2017.

MOTA, J. F.; LAUDARES, J. B. **Desenvolvimento do pensamento geométrico com metodologia para o estudo das superfícies no espaço – plano, cilindros e quádricas.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais ...** Salvador: SBEM, 2010.

MOURA, D. A. S.; SANTOS, A. S.; SILVA, J. J. **Tecnologia a favor da educação matemática: GeoGebra e suas aplicações. SYNTHESIS: Revistal Digital FAPAM**, São Geraldo/MG, v. 7, n. 1, p. 333-346, dez. 2016.

SANTOS, I. E. **Manual de métodos e técnicas de pesquisa científica**. 5. ed. Niterói: Impetus, 2005.

SOUZA, M. B. **Ensino de geometria analítica auxiliado por software. Encontro Nacional de Educação Matemática** - ENEM, 7., São Paulo. **Anais ...** São Paulo: SBEM, 2016.

SOUZA, M. B.; FONTES, B. C.; BORBA, M. C. **A Coparticipação da Tecnologia Digital na Produção de Conhecimento Matemático. Sisyphus - Journal of Education**, Lisboa, v. 7, n. 1, p. 62-82. 2019.

UFRGS. **Portal Aramis**, 2008. Disponível em: <http://www.aramis.ufrgs.br/site/conteudo.asp?cod_ctd=83>. Acesso em: 24 jul. 2021.

VALENTE, J. A. **Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: O papel do computador no processo ensino-aprendizagem.** In: ALMEIDA, M. E. B. **Integração das Tecnologias na Educação**. Brasília: SEED, 2005.

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B.; GERALDINI, A. F. S. **Metodologias ativas: das concepções às práticas em distintos níveis de ensino. Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 17, n. 52, p. 455-478. 2017.

CAPÍTULO 7

DE LOS REALES A LOS COMPLEJOS, SÓLO HAY UN PEQUEÑO PASO

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 08/04/2022

Marisol Radillo Enríquez
Universidad de Guadalajara
Guadalajara, Jalisco, México
https://orcid.org/ 0000-0001-8313-9443

Vladimir Efremov
Universidad de Guadalajara
Guadalajara, Jalisco, México

Juan Martín Casillas González
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente
Guadalajara, Jalisco, México

RESUMEN: En nuestra experiencia, los estudiantes universitarios que comienzan el estudio de Análisis Complejo se enfrentan a algunas dificultades relacionadas con el concepto del infinito, mismas que pueden evitarse si se añaden unos cuantos conceptos a los cursos básicos que incluyen números reales y complejos. En este trabajo se presenta a los profesores de nivel medio y del primer año universitario, analizar las sutiles diferencias con las que el infinito es abordado tanto en el campo de los números reales como en los números complejos. Nuestra propuesta consiste en desarrollar el concepto del punto al infinito para el plano complejo en términos de la proyección estereográfica y compararlo con el concepto de puntos al infinito en la recta real, con apoyo de la computadora. Las demostraciones formales se dejan para cursos avanzados, en su lugar proponemos actividades de visualización que permitan a los estudiantes entender estos conceptos básicos. Se espera que, con estas actividades, los estudiantes de cursos matemáticos elementales tengan un panorama más amplio de las matemáticas avanzadas.

PALABRAS CLAVE: Plano complejo, proyección estereográfica.

FROM REAL TO COMPLEX, THERE IS ONLY ONE SMALL STEP

ABSTRACT: From our own experience, college students who approach the study of Complex Analysis face some difficulties related to the concept of infinity, which can be avoided by adding a few concepts to the basic courses that include real and complex numbers. In this work, high school and first-year university teachers are presented with an analysis of the subtle differences with which infinity is approached both in the field of real numbers and in complex numbers. Our proposal consists in developing the concept of the point at infinity for the complex plane in terms of the stereographic projection and comparing it with the concept of points at infinity on the axis of the real numbers, with the support of the computer. Formal proofs are left for advanced courses, instead we propose visualization activities that allow students to understand these basic concepts. With these activities, it is hoped that students in elementary mathematics courses will have a broader view of advanced mathematics.

KEYWORDS: Complex plane, Stereographic

projection.

1 | INTRODUCCIÓN

Los números complejos se abordan brevemente en los primeros cursos universitarios, como preámbulo a los cursos de Precálculo o Álgebra, para continuar con materias tales como Cálculo Diferencial e Integral. Aunque estos cursos son obligatorios en las todas carreras universitarias del área de Ciencias Exactas e Ingenierías, son menos frecuentes los cursos de Análisis Real y Análisis Complejo, que se restringen a las carreras de Física, Matemáticas y algunas Ingenierías. No obstante, es interesante analizar las sutiles diferencias con las que el infinito es abordado en los cursos mencionados, con la intención de ampliar el conocimiento matemático de los alumnos, y que ellos desarrollen el pensamiento matemático que se requiere en las diversas carreras del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México.

Los primeros cursos de matemáticas en el CUCEI se enfocan en el campo de los números reales, pero incluyen una rápida "ojeada" a los números complejos. Se comienza con la necesidad de ampliar los números reales, se abordan sus formas de representación (binomial, trigonométrica y exponencial) y las operaciones básicas entre los números complejos (adición, sustracción, multiplicación, potencias, raíces). Después de esto, se abordan ramas de las matemáticas en las que solamente se manejan números reales, tales como Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vectorial, Álgebra Lineal, Análisis Numérico, Análisis Real, etc. Una vez concluidos estos cursos, en algunas carreras se ha incluido el estudio de la variable compleja. A su vez, el curso de Análisis Complejo comienza desde los mismos temas con que se concluyó, un año antes, el estudio de los números complejos; en este nivel, los estudiantes son capaces de demostrar teoremas y propiedades de los números complejos.

Por otra parte, la proyección estereográfica, entendida como la transferencia de un elemento (punto) desde una esfera a un plano, o viceversa, es un ejemplo clásico de transformaciones, cuyas aplicaciones más comunes se encuentran en la topografía, la cartografía y la geología. En el ámbito matemático este procedimiento se discute en los cursos de geometría diferencial y representa un área de oportunidad valiosa, ya que atiende:

- la transformación entre espacios,
- la diferenciabilidad de estas transformaciones
- los límites de estas transformaciones
- los elementos geométricos y analíticos que se involucran.

Estas características no solo atienden a funciones de variable real, sino que aparecen en otros cursos, tales como el de variable compleja, donde pueden discutirse

temas como el límite de una función compleja cuando su argumento tiende al infinito, y el límite al infinito de una función compleja.

Nuestra propuesta consiste en añadir al primer curso en el que se abordan los números complejos (Precálculo o Álgebra, según la carrera de que se trate), los conceptos de "punto al infinito", "recta real extendida", "plano complejo extendido", "recta real proyectivamente extendida" y homeomorfismo, para lo cual es necesaria la proyección estereográfica. Para facilitar el aprendizaje, dado que está dirigido a estudiantes de primer ingreso, hemos diseñado unas sencillas actividades mediadas por computadora, con el fin de que los estudiantes visualicen las relaciones entre conceptos.

En este trabajo no se pretende profundizar en el concepto del infinito, sino proponer una reflexión sobre posibles detalles que generan confusión en los estudiantes que transitan del Análisis Real al Análisis Complejo.

En la primera parte de este documento, dirigido a profesores de enseñanza media o de los primeros cursos del nivel superior, abordaremos los conceptos básicos involucrados en este trabajo, tales como el límite al infinito de una sucesión en el plano complejo, las igualdades básicas que involucran al infinito y las expresiones que carecen de sentido por llevar a incertidumbres.

En la segunda parte se abordan la proyección estereográfica y su visión geométrica, la cual involucra la noción de homeomorfismo. Aquí se incluyen algunos temas vinculados con el infinito y la proyección estereográfica, que se abordan en los cursos de Análisis Real. Aunque estos temas requieren diversas demostraciones en los cursos de Análisis Complejo, nuestra propuesta es abordarlos a un nivel acorde al programa de estudios del primer año universitario.

Finalmente, describimos unas actividades mediadas por computadora, para que el estudiante tenga la oportunidad de manipular los objetos matemáticos involucrados y así, construya activamente el significado del punto infinito y la proyección estereográfica.

2 | CONCEPTOS BÁSICOS

La propiedad de orden de los números reales establece que, si a y b son números reales diferentes, entonces $a < b$ ó $b < a$. Los números complejos carecen de esta propiedad de orden, ya que no es posible determinar, por ejemplo, si $3+i5$ es mayor o menor que $5+i3$, aunque sí existe una propiedad de orden parcial, si nos referimos al módulo de dichos números complejos.

Al comenzar el estudio del Análisis Complejo, se dice que la recta real extendida $\hat{\mathbb{R}}$ debe contener dos puntos al infinito $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, para conservar dicha propiedad de orden. También se dice que el plano complejo extendido ($\overline{\mathbb{C}}$) naturalmente contiene solo un punto infinito $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que aparece como el "polo norte" en la esfera de Riemann S^2, como resultado de la proyección estereográfica.

Sin embargo, si estamos dispuestos a sacrificar el orden completo del eje real, podemos aplicar el análogo uno-dimensional de la proyección estereográfica y obtener la recta real proyectivamente extendida $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que es topológicamente equivalente, es decir homeomorfa, a una circunferencia unitaria S^1. A continuación, explicaremos la relación entre todas estas nociones.

3 I EL PUNTO AL INFINITO

El concepto del punto al infinito se utiliza para hablar inteligiblemente sobre límites infinitos (Marsden y Hoffman, 1999). Desde los primeros cursos universitarios, los estudiantes conocen el conjunto de los números complejos (finitos) $\mathbb{C}$, y que cualquier elemento de ese conjunto ($z \epsilon \mathbb{C}$) puede representarse en coordenadas cartesianas como $z=x+iy$ (forma binomial o cartesiana), donde x es la parte real de z ($x=Rez$) e y es la parte imaginaria de z ($y=Imz$). El número i se llama unidad imaginaria y tiene la propiedad determinante $i^2=-1$.

Se define el punto impropio ∞, que no pertenece al conjunto de los números complejos finitos mediante una sucesión que tiene límite al infinito. Por definición, una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos finitos, tiene límite al infinito ($\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$), si para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentra un número natural $N(\varepsilon)$ tal que el módulo de z_n, es mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$, siempre que $n > N(\varepsilon)$. Este límite es lo que denominamos punto al infinito (∞).

Nótese que para el punto al infinito no están definidas ni la parte real, ni la parte imaginaria. Para el módulo del infinito ∞ se usa el símbolo +∞, esto es $|\infty|=+\infty$, el cual pertenece a la recta real extendida $\hat{\mathbb{R}}$.

Para ciertos propósitos, es posible definir algunas operaciones entre ∞ y cualquier número complejo, mediante algunas “reglas” que tienen sentido en el contexto de límites (Zill y Shanahan, 2011; Markushevich, 1987):

1) $\infty \pm z = z \pm \infty = \infty;$

2) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, si\ z \neq 0;$

3) $z/\infty = 0;\ \infty/z = \infty;$

4) $z/0 = \infty, si\ z \neq 0;$

5) $\infty \cdot \infty = \infty$

Algunas operaciones carecen de sentido, tal es el caso de: $\infty \pm \infty$, $0\ \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, pues en estos casos, la aplicación de los límites nos lleva a incertidumbres.

En consecuencia, se puede definir el plano complejo extendido como la unión formal del plano complejo $\mathbb{C}$ y el punto al infinito.

4 I PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

La representación geométrica del plano extendido en el espacio (tridimensional), se obtiene por medio del procedimiento denominado proyección estereográfica. En dicha representación es posible demostrar (en cursos avanzados) que el plano complejo extendido es equivalente a una esfera unitaria bidimensional S^2, conocida como esfera de Riemann (figura 1).

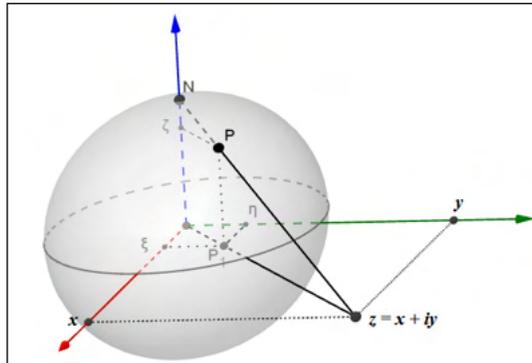



Figura 1. Esfera de Riemann y el plano complejo extendido

Para realizar la proyección estereográfica introducimos en un espacio euclidiano de tres dimensiones las coordenadas ξ,η,ζ, tales que los ejes ξ y η coinciden con el eje real (Re) y el eje imaginario (Im) en el plano complejo, respectivamente; el eje ζ es perpendicular al plano complejo y completa el espacio 3-dimensional. El plano complejo extendido se define por medio de la ecuación $\zeta=0$. Luego se construye una esfera S^2, con radio 1 y centro en el inicio de coordenadas (figura 1), cuya ecuación es $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$.

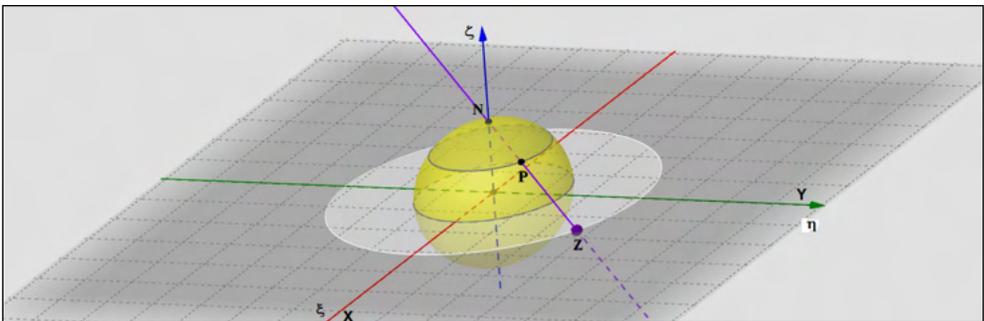



Figura 2. Proyección estereográfica entre la esfera S^2 y $\bar{\mathbb{C}}$.

Se construye una recta r que une al punto z del plano complejo con el punto $N(0,0,1)$, llamado polo norte de la esfera. A cada punto z, le corresponde un punto $P(\xi,\eta,\zeta)$

de intersección de la esfera S^2 con la recta r. Tal correspondencia $z \to P$ se llama proyección estereográfica.

Bajo la proyección estereográfica, tanto los círculos en $\mathbb{C}$ y las rectas en $\bar{\mathbb{C}}$, se transforman en círculos en S^2, y viceversa. De esta manera, es fácil identificar el significado geométrico del límite al infinito $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, si se define una ε-vecindad del punto al infinito como el conjunto de puntos que están al exterior del círculo de radio $\frac{1}{\varepsilon}$ (Figura 2).

5 | COMPARACIÓN DEL CONCEPTO DE PUNTOS AL INFINITO PARA EL PLANO COMPLEJO Y LA RECTA REAL

Existe una fuerte diferencia entre la recta real $\mathbb{R}$ y el plano complejo $\mathbb{C}$. El conjunto de los números reales es completamente ordenado respecto a una relación "menor que", es decir para cualquier par de números reales diferentes, x_1 y x_2, siempre se cumple o $x_1 < x_2$ ó $x_2 < x_1$.

Para los números complejos existen solo órdenes parciales. El más natural de estos órdenes está conectado con las comparaciones de los módulos correspondientes, decimos que $z_1 < z_2$ si $|z_1|<|z_2|$. Este orden es compatible con la existencia del único punto infinito, que hemos definido por medio de la proyección estereográfica.

Para la recta real $\mathbb{R}$, existe un análogo de la proyección estereográfica: por el mismo procedimiento que en el caso $\mathbb{C}$, se obtiene la recta real proyectivamente extendida $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, la cual es homeomorfa a una circunferencia S^1(figura 3). El polo norte N corresponde al único punto al infinito. La recta real proyectivamente extendida $\bar{\mathbb{R}}$ pierde el orden completo que se tenía en la recta real ordinaria $\mathbb{R}$, ya que para cualquier par de números reales x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$, ahora debemos escribir $\infty<x_1<x_2<\infty$, que es una contradicción.

No obstante, existe la recta real extendida $\hat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ que conserva el orden natural de la recta real $\mathbb{R}$. En este caso, la sucesión $-\infty<x_1<x_2<+\infty$ no es contradictoria. La recta $\hat{\mathbb{R}}$ es homeomorfa a un segmento cerrado [-1,+1]. Aquí +1 corresponde a $+\infty$, -1 corresponde a $-\infty$.

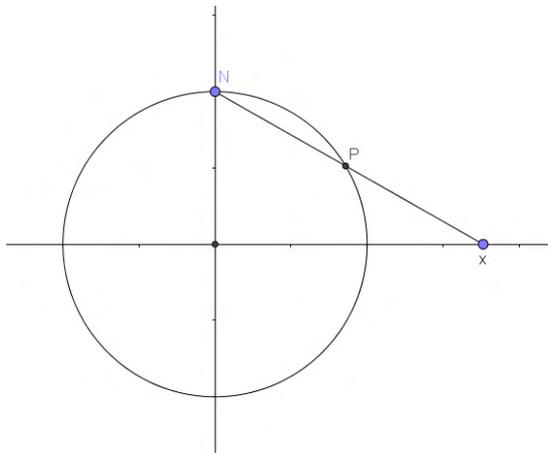



Figura 3. Análogo de la proyección estereográfica para el eje real.

6 I ACTIVIDADES MEDIADAS POR COMPUTADORA

Nuestra propuesta incluye actividades de visualización, con apoyo del programa GeoGebra. Se guía al estudiante en la construcción de la representación geométrica de la proyección estereográfica de $\mathbb{R}$ en S^2, para que él mismo compruebe que $-\infty$ y $+\infty$ convergen en *N*.

Instrucciones.

1. Abrir GeoGebra con: vista algebraica, vista gráfica y vista gráfica 3D.

2. En la gráfica 3D, renombrar los ejes X como Re e Y como Im, para asociar el plano complejo con la gráfica 2D.

3. En vista gráfica 3D, crear una esfera con centro en el punto (0,0,0) y radio 1. Enseguida, quitar graduaciones y números de los tres ejes y mostrar la cuadrícula en el plano complejo.

4. Renombrar el punto *A*(0,0,0), centro de la esfera, como O y añadir el polo norte *N*(0,0,1).

5. En Vista gráfica 2D, colocar un punto Z sobre el eje X. En vista gráfica 3D, también aparece el punto Z; trazar el segmento $\overline{ZN}$ y solicitar sus intersecciones con la esfera. De manera automática, se asignan los nombres B y C. Ocultar el punto que coincide con N y renombrar el otro como P (ver figura 4).

6. En vista gráfica 2D, pedir animación del Z, y observar el desplazamiento de P en vista gráfica 3D. También es posible pedir la rotación de la gráfica 3D mientras se observa la animación de Z en el eje real.

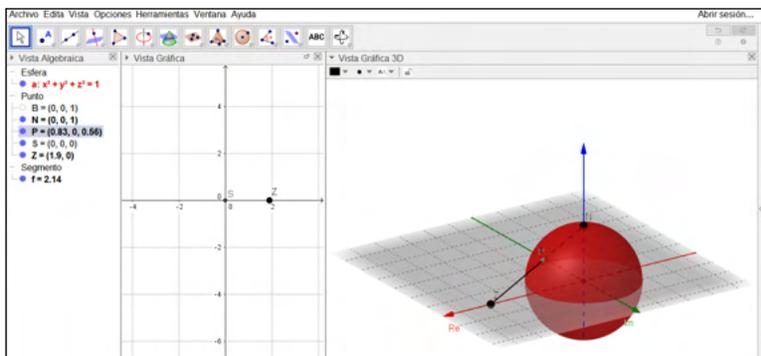



Figura 4. Proyección estereográfica de $\mathbb{R}$ en S^2, -∞ y ∞ convergen en N

Se observa que al desplazarse el punto Z hacia -∞ o +∞ en el eje real (Vista gráfica 2D), la proyección de Z en la esfera, es decir, el punto P, se aproxima al polo norte (Vista gráfica 3D). Esto significa que en el complejo extendido existe un solo punto infinito.

7 | CONSIDERACIONES FINALES

En nuestro trabajo hemos abordado los conceptos básicos de la proyección estereográfica, con la finalidad de mostrar a profesores y estudiantes del nivel medio superior (o secundario) la relación entre los contenidos de cursos básicos de matemáticas, con el inicio del Análisis Complejo. Nuestra intención es que los estudiantes de bachillerato o ESO vislumbren el enorme y fascinante campo de los números complejos, al mismo tiempo que se enriquece su proceso de aprendizaje.

Si bien solo describimos aquí solo una actividad mediada por la computadora, por razones de espacio, esperamos que al lector le sea posible construir todas las figuras incluidas en este documento, para implementar más actividades de aprendizaje relacionadas con el campo de los números complejos y la proyección estereográfica.

REFERENCIAS

Markushevich, A. **Teoría de las funciones analíticas**. Moscú: Editorial Mir.1987

Marsden, J. E., Hoffman, M. J. **Análisis básico de variable compleja**. México: Editorial Trillas. 1999

Zill, D., G., Shanahan, P. D. **Introducción al análisis complejo con aplicaciones.** México: Cengage Learning. 2011

CAPÍTULO 8

O ENSINO DE SOMA E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES COM DENOMINADORES IGUAIS NO 6º ANO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA POR MEIO DA UTILIZAÇÃO DO DISCO DE FRAÇÃO

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 19/04/2022

Alan Jorge de Jesus Silva
Universidade do Estado do Pará - UEPA
Vigia - Pará
http://lattes.cnpq.br/4602597135450249

Beatriz de Vilhena Medeiros
Universidade do Estado do Pará - UEPA
Vigia - Pará
http://lattes.cnpq.br/8001550906888455

Pedro Lucas Viana Ferreira
Universidade do Estado do Pará - UEPA
Vigia - Pará
http://lattes.cnpq.br/5403575299808395

Larisse Lorrane Monteiro Moraes
Universidade do Estado do Pará - UEPA
Vigia - Pará
http://lattes.cnpq.br/0559548589731720

RESUMO: O presente estudo discute sobre o ensino de frações por meio da utilização do material didático: Disco de Fração. Assim, temos como questão problema avaliar como o uso desse material manipulável pode contribuir para amenizar as dificuldades que os alunos do 6º ano apresentam em relação a soma e subtração de frações com denominadores iguais. Desta forma, formulamos como objetivo: desenvolver a partir do auxílio do disco de frações, uma didática pedagógica em relação a adição e subtração de frações com denominadores iguais. Para sua fundamentação, utilizamos como fontes principais as pesquisas e trabalhos de Santos (2014), Caraça (1989), Smole e Diniz (2016). Em relação aos procedimentos metodológicos, fizemos uso da pesquisa de revisão integrativa de acordo com a visão de Souza, Silva e Carvalho (2010). E, para análise de dados, usamos a base de investigação qualitativa conforme a perspectiva de Godoy (1995). A pesquisa foi desenvolvida na Escola E.E.F. Comte. Castilhos França com os alunos do 6° ano. Deste modo, elaboramos uma proposta pedagógica para ensinar frações por meio do material manipulável, para que os alunos conseguissem associar os conceitos abstratos e concretizá-los através do disco de fração. Assim, conclui-se, que o mesmo, foi de fundamental importância tanto para o entendimento do que é uma fração, quanto para a soma e subtração com denominadores iguais do referido assunto.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de matemática. Aprendizagem de adição e subtração de frações. Materiais manipuláveis.

TEACHING SUM AND SUBTRACTION OF FRACTIONS WITH EQUAL DENOMINATORS IN 6TH GRADE: A DIDACTIC PROPOSAL USING THE FRACTION DISK

ABSTRACT: The present study discusses the teaching of fractions using the teaching material: Fraction Disk. Thus, we have as a problem to evaluate how the use of this manipulable material can contribute to alleviate the difficulties that 6th grade students have in relation to the addition and subtraction of fractions with equal denominators. In this way, we formulate as an objective: to

develop from the aid of the fraction disk, a pedagogical didactic in relation to the addition and subtraction of fractions with equal denominators. For its reasoning, we used as main sources the research and works of Santos (2014), Caraça (1989), Smole and Diniz (2016). Regarding the methodological procedures, we used the integrative review research according to the vision of Souza, Silva, and Carvalho (2010). And, for data analysis, we used the qualitative research base according to the perspective of Godoy (1995). The research was developed at the E.E.F. Comte. Castilhos França with 6th grade students. In this way, we developed a pedagogical proposal to teach fractions through manipulative material, so that students could associate abstract concepts and concretize them through the fraction disk. Thus, it is concluded that it was of fundamental importance both for the understanding of what a fraction is, and for the addition and subtraction with equal denominators of that subject.
KEYWORDS: Mathematics teaching. Learning addition and subtraction of fractions. Manipulating materials.

1 I INTRODUÇÃO

O ensino de matemática, desde os seus primórdios, enfrenta demasiados problemas quando focamos à relação professor-aluno. Em virtude disso, segundo Piovesan e Zanardini (2008), de um lado, observa-se a incompreensão e a carência de motivação, por parte dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos ministrados em sala de aula de maneira tradicional, e do outro, está o professor que não consegue alcançar resultados efetivos no ensino de sua disciplina. Diante disso, podemos perceber que o processo de construção do conhecimento matemático do discente pode ser prejudicado a partir da forma que o mesmo é aplicado pelo docente.

Deste modo, é de suma importância o ensino e aprendizagem do Objeto de Conhecimento Matemático: Fração. Na educação básica, sua utilidade é notada em várias situações, em especial para representar algo que não conseguimos apresentar através de números naturais por exemplo. No entanto, percebe-se dificuldades nos docentes em mediar tal conteúdo, e também, nos discentes em compreender os conceitos de frações, a exemplo temos, a não compreensão da parte em relação ao todo. Nota-se também, a dificuldade de socialização na construção do conhecimento, pois, em diversas circunstâncias, o livro didático não dialoga com a realidade e contexto social dos discente. Soma-se a isso, a abordagem de forma superficial, tradicional e mecânica, focada apenas para as resoluções de atividades e exercícios.

Assim, para o desenvolvimento de nossa pesquisa, seguimos com a problematização: como o uso do disco de fração pode contribuir para amenizar as dificuldades que os alunos do 6º ano apresentam em relação a soma e subtração de frações com denominadores iguais. Deste modo, a partir da utilização e confecção prática desse material didático pelo aluno, esperamos, que o mesmo colabore para facilitar tanto a visualização de um inteiro dividido em partes, e como essas subdivisões se relacionam podendo formar diferentes frações,

quanto as operações matemáticas (adição e subtração) que podem ser representadas de maneira concreta através da manipulação do material.

Para tanto, este trabalho segue a pesquisa de revisão integrativa, pois conforme Souza, Silva e Carvalho (2010, p.102) temos que "revisão integrativa é um método que proporciona a síntese de conhecimento e a incorporação da aplicabilidade de resultados de estudos significativos na prática". E, para análise de dados, fazemos uso de uma abordagem qualitativa, pois esta "não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques" (GODOY, 1995, p.21). Dessa forma, a referida pesquisa, foi desenvolvida na Escola E.E.F. Comte. Castilhos França, tendo como público alvo os alunos do sexto ano do ensino fundamental.

2 I UM POUCO DA HISTÓRIA DO OBJETO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO FRAÇÕES

A Matemática escolta o homem desde seus proêmios e está presente na maioria das ações do dia a dia, haja vista a necessidade das pessoas em mensurar e contar objetos desde os tempos pré-histórico, o que levou as pessoas a criarem a Matemática, com a finalidade de sanar tais necessidades. Segundo Caraça (1989, p. 3):

> Toda a gente sabe como as necessidades da vida corrente exigem que, a cada momento, se façam contagens – o pastor para saber se não perdeu alguma cabeça do seu rebanho, o operário para saber se recebeu todo o salário que lhe é devido, a dona de casa ao regular suas despesas pelo dinheiro de que dispõe, o homem de laboratório ao determinar o número exato de segundos que deve durar uma experiência – a todos se impõe constantemente, nas mais variadas circunstâncias, a realização de contagens.

Desde muito cedo, a humanidade percebeu a existência de outros números, além dos números inteiros. De acordo com diversos autores, o estudo de frações ocorreu acerca de 3.000 a.C no Egito, pois os matemáticos dos faraós realizavam marcações nas áreas das terras às margens do rio Nilo para que os egípcios cultivassem e plantassem. Porém havia muitas inundações, o que desfazia as demarcações, gerando a necessidade de remarca-las, além disso, existia a necessidade de medir tecidos, líquidos, repartir colheitas, etc. Todavia, nem sempre as medidas davam números inteiros, dessa forma surgiu a necessidade de se criar um novo tipo de unidade de medida, ou seja, um novo número. Mostram-se então as primeiras noções de números fracionários e utilização de frações. Já os Babilônicos utilizavam frações com denominadores 60, por ser a base do sistema de numeração adotada, usavam métodos de potências para representa-las, criando então, o princípio da posição às frações, ou seja, a notação. (MACHADO,2013; FERNANDEZ,2008) Para Caraça (1989, p. 35):

> [...] os números racionais nascem a partir do momento em que o homem encontra dificuldade para exprimir uma razão não exata, quando há uma

> impossibilidade de divisão, assim feita uma subdivisão da unidade em *n* partes iguais, onde uma dessas partes caiba *m* vezes na grandeza a medir, a dificuldade surge quando *m* não é divisível por *n*.

Através das frações egípcias e babilônicas, revelaram – se várias outras notações em diversas civilizações. Desde o século XVI surgem as frações com numeradores maiores que o numeral 1. Essa relação moderna tem vínculo com os hindus e árabes, gerando assim o Sistema de Numeração Hindu – Arábico, o qual o Brasil utiliza.

3 I O USO DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS EM AULAS DE MATEMÁTICA

A utilização de materiais didáticos como ferramenta auxiliar para o ensino de matemática, assim como de todas as demais disciplinas da área da educação, visa promover e explicitar o objeto de conhecimento ministrado de forma concreta. Dessa forma, mostra-se de grande importância o seu uso, pois os mesmos reforçam o processo de simulação entre os conceitos abstratos e suas relações com o "mundo real", permitindo assim que os alunos possam compreender as concepções do conteúdo estudado com a aplicação do material concreto (SMOLE; DINIZ, 2016).

Ademais, diante do cenário atual, é praticamente improvável não associar algum material manipulável para a educação matemática, pois existem vários autores que reforçam e colaboram para o crescimento e desenvolvimento dessa aplicação no ensino como uma forma para melhorar a prática pedagógica. Sobre a utilidade e necessidade do material didático, Smole e Diniz (2016, p.10) colocam da seguinte maneira:

> Assim, os materiais didáticos há muito vêm despertando o interesse dos professores e, atualmente, é quase impossível que se discuta o ensino de matemática sem fazer referência a esse recurso. No entanto, a despeito de sua função para o trabalho em sala de aula, seu uso idealizado há mais de um século não pode ser aceito hoje de forma irrefletida.

Contudo, é necessário destacarmos que o uso de materiais concretos não deve ser feito de qualquer maneira, pois a atuação do professor de matemática frente a manipulação dos mesmos, assim como a forma que este irá utilizar para fazer a associação do material manipulável junto com o objeto de conhecimento matemático ministrado, será de fundamental importância para que o aluno consiga desenvolver uma aprendizagem benéfica e construtiva. Dessa forma, de nada valem materiais didáticos serem usados como ferramenta pedagógica, se eles não estiverem ligados a objetivos bem claros e se seu uso ficar restrito apenas à manipulação ou ao manuseio que o estudante quiser fazer dele (SMOLE; DINIZ, 2016). Nesse sentido, vemos o quanto é essencial o docente conseguir construir um alinhamento entre o manuseio do material manipulável e a sua aplicação por meio do conteúdo de estudo.

Logo, em busca de tornar o ensino de matemática mais próximo da realidade dos alunos, a inserção de materiais manipuláveis na sala de aula, assim como pode facilitar a

compreensão de determinado objeto de conhecimento matemático, tende a despertar ao discente um novo olhar sobre a disciplina, que na grande maioria das vezes pode se tornar desgastante. Assim, sobre as aulas de matemática na educação básica, Silva (2016, apud SOARES; SILVA, 2018, p. 03), afirma que, “são consideradas maçantes, desenvolvidas de maneira descontextualizadas da realidade de nossos alunos, promovendo a memorização dos conteúdos e não sua compreensão”. Por isso, acreditamos que inovar a prática didática promove melhorias tanto para o docente da área de matemática, em meio a seus métodos e técnicas para o ensino, assim como para o aluno, por vir a reconhecer a disciplina como mais próxima de sua realidade.

4 I A IMPORTÂNCIA DO USO DO MATERIAL MANIPULÁVEL DISCO DE FRAÇÕES EM AULAS DE MATEMÁTICA

O uso do material manipulável disco de fração utilizado nas séries do 6º ano do ensino fundamental, propicia aos alunos e professores uma abordagem mais clara e objetiva do conteúdo fração ensinado, tornando a aula mais dinâmica e prazerosa, onde o aluno tem a oportunidade de construir seu conhecimento baseado no concreto, utilizando o disco de frações para resolver questões, bem como o professor poderá utilizar o material manipulável para realizar jogos, desafiando os alunos.

> De acordo com Reys (1971, apud PASSOS, 2009, p. 78), os materiais manipulativos são “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia”. Desta forma esses materiais “são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa” (PASSOS, 2009, p. 78).

Os matérias manipulativos como o utilizado nesse estudo, disco de frações, constitui-se como recurso importante para ser trabalhado e utilizado nas séries do fundamental para trabalhar o conceito de frações: soma e subtração de fração, estabelecendo relação entre parte e todo. Com esse material de fácil montagem o professor tem a oportunidade de diversificar sua pratica pedagógica utilizada dentro de sala de aula. Ademais o uso de materiais didáticos manipuláveis propicia uma abordagem de maneira clara e objetiva dos conteúdos a serem ensinados, tornando as aulas de matemática mais dinâmicas e prazerosas.

A utilização dos matérias didáticos manipuláveis auxilia com que os alunos sejam ensinados os conteúdos matemáticos a partir de experiencias concretas, como o uso do disco de frações que mostra que através do manuseio dos mesmos, eles conseguem compreender regras e fixar melhor o que está sendo ensinado.

Percebe-se que o ensino com manuseio de matérias manipuláveis como o disco de frações proporciona ao discente a concretização de ideias, as quais, eles aprendem a teoria, através da visualização dos materiais os alunos podem construir seus próprios

conceitos, deduzir fórmulas, compreender regras e o mais importante que é perceber a aplicação do conteúdo que está sendo trabalhado. O uso deste material, nas aulas de matemática, trabalhado pelos docentes, proporciona um grande avanço e melhoria no ensino-aprendizagem professor e aluno, tornando assim, as aulas mais lúdicas, agradáveis e divertidas, mudando o pensando dos alunos de que a matemática é uma matéria "chata" de números para um pensamento de que a disciplina possa ser bonita e agradável se ensinada de outra maneira.

É necessário trabalhar com o aluno suas habilidades e sua inteligência de forma lúdica para que este, possa construir um pensamento lógico e propor boas soluções para suas atividades no dia a dia escolar (SANTOS, 2014). Ressaltando-se a importância de se trabalhar com Materiais Didáticos que possa ser manipulado pelos alunos, possibilitando construir seu conceito a partir do concreto, onde o aluno constrói seu conhecimento, proporciona base para a abstração, questiona quanto a construção e quebra a rotina da aula, há uma maior socialização e interação, com muito interesse envolvido.

5 | METODOLOGIA

A estrutura desta pesquisa está estabelecida por meio da revisão integrativa. De acordo com Souza, Silva e Carvalho (2010, p.102) existem seis fases para construção da mesma, e deve-se respeitar a seguinte ordem "[...] elaboração da pergunta norteadora, busca ou amostragem na literatura, coleta de dados, análise crítica dos estudos incluídos, discussão dos resultados e apresentação da revisão integrativa".

A primeira fase da revisão integrativa, caracteriza-se, por meio da elaboração da questão problema: "como o uso do disco de fração, pode contribuir para amenizar as dificuldades que os alunos do 6º ano apresentam em relação a soma e subtração de frações com denominadores iguais?".

Para o conhecimento de artigos relacionados com a questão norteadora da pesquisa, utilizamos como base de dados periódicos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Scientific Electronic Library Online (SCIELO BRASIL).

Ademais, após a busca por diversos artigos envolvidos em nossa temática de pesquisa, fizemos a análise crítica dos conhecimentos previamente descobertos para assim selecionarmos os mais direcionados a nossa pretensão de estudo. De acordo com Sousa, Silva e Carvalho (2010, p. 104), "[...] esta fase demanda uma abordagem organizada para ponderar o rigor e as características de cada estudo."

A partir da análise cuidadosa dos artigos delimitados, podemos discutir sobre os possíveis resultados dessa pesquisa e em como a mesma poderá se desenvolver futuramente, caracterizando assim uma nova percepção do uso de materiais manipuláveis, como o disco de frações, para inovações na didática do professor. Além disso, ao nos focarmos na sexta fase da revisão integrativa, que é a apresentação em si, pretendemos

expor uma revisão clara e completa para permitir ao leitor avaliar criticamente os resultados desenvolvidos em nossa proposta de estudo.

A ideia do projeto em questão é de se fazer uso da análise de dados qualitativa, como base para os procedimentos teóricos desenvolvidos e relatados na prática de nosso trabalho, visto que, a análise qualitativa, caracteriza-se, como um reconhecido lugar entre as várias alternativas de se estudar os fenômenos que envolvem os indivíduos e suas complexas relações sociais, estabelecidas em diversos ambientes (GODOY, 1995).

Além destas metodologias, utilizaremos a pesquisa documental, conforme Godoy (1995, p.23), "A escolha dos documentos não é um processo aleatório, mas se dá em função de alguns propósitos, ideias ou hipóteses". Ademais, como técnica de pesquisa, a observação participante se adequa ao nosso objetivo de estudo, pois a mesma, segundo Oliveira (2010, p.08), "Nessa técnica[2] de pesquisa qualitativa, os investigadores imergem no mundo dos sujeitos observados, tentando entender o comportamento real dos informantes, suas próprias situações e como constroem a realidade em que atuam". Portanto, para a aplicação e execução do estudo proposto, utilizaremos como local a Escola E.E.F. Comte. Castilhos França.

6 | PASSO A PASSO DA PROPOSTA

A escolha do disco de fração para ser trabalhado nas séries do 6º ano do fundamental, visava uma alternativa metodológica, com o uso reflexivo de materiais manipulativos nas aulas de Matemática para auxiliar os discentes no entendimento desse conceito matemático, De acordo com Reys (1971, apud PASSOS, 2009, p. 78),

> os materiais manipulativos são "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia". Desta forma esses materiais "são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa" (PASSOS, 2009, p. 78). Assim, segundo Passos (2009) esses recursos didáticos se constituem como mediadores para ajudar na relação professor, aluno e conhecimento no momento que for necessário construir um saber escolar.

Em face a isto, considerando as dificuldades dos alunos em relação ao ensino de fração que tange a soma e subtração, a utilização de matérias manipulativos tem se constituído como uma forma relevante para ensinar a matemática, e também podendo ajudar na compreensão do conteúdo ao possibilitar uma maior interação aluno-professor. Este recurso didático visa auxiliar na visualização da representação gráfica de uma fração. Ele contribui não apenas na compreensão das noções de frações, como é um excelente objeto matemático para a aprendizagem do conceito de equivalência.

Para sua confecção, utilizamos os seguintes materiais: EVA de várias cores, folhas de papel cartão, compasso, transferidor, régua, tesoura, cola para EVA e lápis.

De posse desses materiais, sua produção se constituiu em quatro etapas:

Na primeira, foi definido um raio para fazer os discos utilizando a régua e o compasso. Durante a produção desse material escolhemos um raio de 10 cm para fazer os discos.

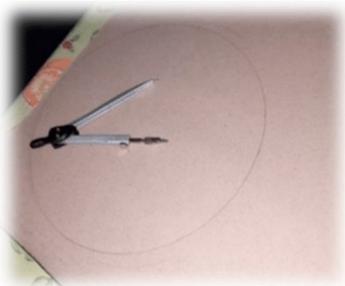



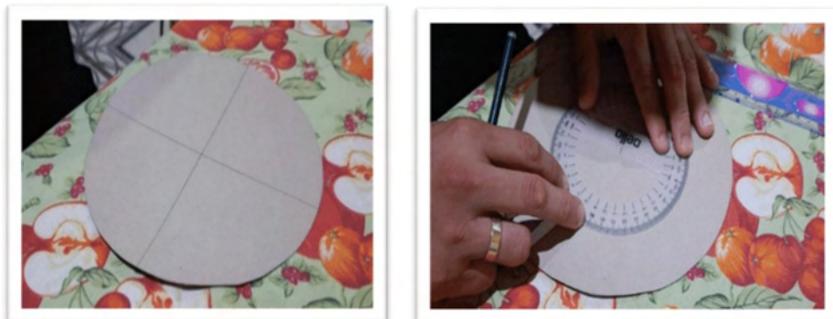
Figura 2 - Definição do raio com o compasso e régua.

Fonte: Os Autores.

Na segunda etapa, tendo o raio definido, fez-se a seleção como centro um local aleatório da folha de EVA e da folha de papel cartão. Com o compasso realizamos o contorno circular dos discos fracionários e, depois, recortamos e colamos as folhas de EVA nas de papel cartão para uma melhor consistência dos discos.

Figuras 3 - Formação dos discos, recorte e colagem do material.

Fonte: Os Autores.

Na terceira etapa, com os discos recortados, foi possível encontrar os ângulos correspondentes a cada disco de fração. Para isso, foram divididos em 360º cada disco pelo denominador da fração que se desejava obter. Por exemplo: para representar a fração 1/3 é preciso dividir 360º/3, que corresponderá ao ângulo de cada 1/3, no caso 120º. Assim, com o ângulo de cada parte do disco, utilizou-se o transferidor e a régua para realizar a medida exata do ângulo, a partir do raio traçado anteriormente.

Figuras 4 - Medição dos ângulos correspondentes a cada discos de frações.

Fonte: Os Autores

Na última etapa, para finalizar o trabalho, recortamos todas as partes correspondentes às frações nos discos marcados e identificamos cada fração pertencente aos discos, escrevendo na parte em que foi colada com a folha de papel cartão. As medidas de cada ângulo das frações para a construção dos discos foram: 1/2 x 360 = 180º; 1/3 x 360 = 120º; 1/4 x 360 = 90º; 1/8 x 360 = 45º;

Figuras 5 - Recorte das partes de cada disco de frações.

Fonte: Os Autores.

7 | RESULTADOS

Após a aplicação da proposta metodológica, esperávamos que os alunos pudessem associar, através do uso do disco de frações, os conceitos do objeto de conhecimento matemático, fração, assim como a soma e subtração com denominadores iguais. Para isso, dividimos os nossos momentos em sala de aula em 3 etapas.

Assim, na primeira etapa, apresentamos aos alunos a nossa proposta de pesquisa, fazendo uso do material manipulável, para demonstrar qual seria a intenção final do trabalho. No entanto, para poder identificarmos, por meio da observação, qual o nível da turma em relação a matemática, fizemos uma breve revisão sobre soma e subtração entre números naturais.

Posteriormente, entregamos um questionário inicial onde foi possível perceber que

grande pare dos discentes são oriundos de escola pública, muitos tinham dificuldade em matemática e não conseguiram efetuar os exercícios propostos sobre adição e subtração de frações com denominadores iguais. Ademais, percebemos ainda que, devido o período de pandemia, a ausência do ensino presencial no sistema público prejudicou o processo de aprendizagem dos alunos, não só na matemática como também na alfabetização dos mesmos.

Figuras 6 - Entrega do questionário inicial.

Fonte: Os Autores

Com isso, na segunda etapa, dividimos a turma em grupos de 5 integrantes e fornecemos os materiais utilizados para a confecção do disco de fração, assim cada equipe construiu o seu próprio material didático. Dessa forma, mediamos a construção do material manipulável conjuntamente com a aula e exposição dos conceitos sobre frações, assim como sua soma e subtração com denominadores iguais.

Ademais, notou-se que a concretização dos conceitos expostos sobre frações em consonância com a manipulação do disco de fração possibilitou a maioria dos alunos uma percepção mais clara do conteúdo ministrado, pois entenderam o que é a representação de um inteiro dividido em partes, e em como essas partes formam diferentes frações. Desse modo, também foi possível trabalharmos a noção de numerador e denominador das frações que utilizamos como base para a aula ministrada, como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$. Com isso, propomos como dinâmica que cada grupo representasse no disco um tipo de fração e uma operação, seja de soma ou subtração, para verificarmos se a turma, de fato, estava compreendendo a aula.

Figuras 7 – Aula sobre frações e a utilização do disco de fração.

Fonte: Os Autores

Dessa forma, na terceira e última etapa, aplicamos um questionário final para os alunos o qual podemos constatar resultados benéficos em nossa proposta de pesquisa. Nesse sentido, percebemos que o uso do disco de fração ajudou os discentes a entenderem os conceitos de frações que expomos em sala de aula, tendo alunos acertando todos os exercícios propostos, mesmo que alguns deles, infelizmente, não tenham conseguido tal resultado. Nota-se, também, que a dinâmica feita em sala foi bem avaliada pela turma, na qual percebemos que a introdução de novas ferramentas didáticas contribui para chamar a atenção do estudante para o assunto ministrado, como o disco de fração, utilizado em nossa pesquisa.

Figuras 8 – Aplicação do questionário final.

Fonte: Os Autores

Além disso, o projeto contribuiu para nossa formação enquanto docentes, pois nos permitiu colocar em prática nosso conhecimento teórico e pedagógico. E também nos permitiu entrar no cotidiano dos professores e do ensino público, percebendo-se a grande dificuldade que os alunos estão enfrentando referente a volta às aulas num cenário pandêmico. Como também, notamos a realidade social dos alunos e como está agrava o aprendizado dos mesmos.

8 | ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A inserção de materiais didáticos em sala de aula configura-se como uma ferramenta muito importante para o docente inovar na sua metodologia didático-pedagógica. Assim, os alunos conseguem visualizar o objeto de conhecimento ministrado de uma maneira diferente, assimilando os conceitos abstratos e podem concretizar essas noções por meio do material manipulável.

Para isso, a proposta de pesquisa visava que a utilização do disco de fração, como material didático, possibilitaria aos discentes um melhor aprendizado a respeito do ensino de frações para o 6º ano do fundamental. Dessa maneira, objetivamos esclarecer a noção de fração como um inteiro dividido em partes e como realizar a soma e subtração com denominadores iguais. Tendo em vista a utilização do material manipulável, podemos perceber que o mesmo pôde auxiliar e facilitar o entendimento do conteúdo por grande parte da turma, a qual no início da aplicação não conseguiu realizar os exercícios propostos. Entretanto, sentimos dificuldade em aplicar a pesquisa, pois nos deparamos com uma classe relativamente atrasada em relação ao processo de construção de conhecimento, pois, devido a pandemia, a falta do ensino presencial prejudicou a própria alfabetização e a educação matemática dos estudantes.

Em meio a nossa experiência, de aplicação da pesquisa proposta, podemos evidenciar a realidade do cenário educacional público do lócus de execução do trabalho. Nesse viés, podemos constatar a vivência do professor em sala de aula e suas demandas diárias e também as dificuldades enfrentadas pelos alunos. Deste modo, tomamos como aprendizagem de todo o desenvolvimento desse projeto, que a utilização do material manipulável, disco de frações, facilitou o aprendizado do objeto de conhecimento matemático escolhido por nós.

Logo, acreditamos que este artigo irá colaborar para a comunidade acadêmica, pois, o mesmo, reforça a utilização de materiais didáticos como ferramenta de manipulação didático-pedagógica, para a diversificação metodológica utilizada pelo docente em sala de aula.

REFERÊNCIAS

SANTOS**,** Maria José Batista de Souza**, O ensino e aprendizagem de frações utilizando materiais concretos, Campina Grande** - Paraíba, 2014, *[s,n]*, Disponivel em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/4290/1/PDF%20%20Maria%20Jos%C3%A9%20Batista%20de%20Souza%20Santos.pdf, acesso em 16 mar. 2022.

SOARES, João Paulo Vasconcelos, **Discos de frações: um material manipulativo para o ensino de frações na educação básica,** Fortaleza, 2018. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/enalic/2018/443-53565-29112018 004239.pdf. Acesso em: 16 mar. 2022.

SCOLARO, Maria Angela; **O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática,** 2018, *[S.I]*. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf, acesso em 16 mar. 2022.

PIOVESAN, Sucileiva Baldissera; ZANARDINI, João Batista; **O ensino e aprendizagem da matemática por meio da metodologia de resolução de problemas: algumas considerações,** Paraná, 2014, *[s,n].* Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_sucileiva_baldissera_piovesan.pdf, acesso em 16 mar. 2022.

MACHADO, Jeane Fernanda Torres; **A compreensão do conceito e operações básicas envolvendo frações com a utilização da escala cuisinaire**, Pará de Minas, 2013, *[s,n],* Disponível em: https://www.passeidireto.com/arquivo/101013000/31032014214953-jeane-fernanda-torres-machado, acesso em 15 mar. 2022.

ALVES. Denis Rogério Sanches, MARTENS, Adam Santos, **Desafios para a construção do conhecimento de frações nas séries intermediárias do ensino fundamental,** Curitiba, 2011, *[s,n],* Disponível em: https://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/6413_3640.pdf, acesso em 15 mar. 2022.

FERNANDES, Sueli Fátima Homon. **As frações do dia-a-dia – operações,** Ponta Grossa - PR, 2008, *[s,n],* Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/48-2.pdf, acesso em 15 mar. 2022

CAPÍTULO 9

INTRODUÇÃO ÀS IDENTIDADES FUNCIONAIS

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 19/04/2022

Mateus Eduardo Salomão
Pato Branco – PR
http://lattes.cnpq.br/9042467665583924

RESUMO: Este artigo aborda o conceito de identidade funcional para a estrutura de anel. Além disso, serão apresentados alguns exemplos a respeito deste conceito e exibida uma relação entre identidades funcionais com as identidades polinomiais. Por fim, será apresentado um resultado sobre matrizes triangulares superiores.
PALAVRAS-CHAVE: Identidades funcionais, Anéis, Identidades Polinomiais.

INTRODUCTION TO FUNCTIONAL IDENTITIES

ABSTRACT: This article addresses the concept of functional identitie for the ring structure. Furthermore, some examples about this concept are presented and a relationship between functional identities and polynomial identities is shown. Finally, a result on upper triangular matrices will be presented.
KEYWORDS: Functional identities, Rings, polynomial identities.

1 | INTRODUÇÃO

Dado um anel A, considere o seguinte problema: quais são as funções $E,F : A \to A$ tais que

$$E(x)y + F(y)x = 0, \quad (1)$$

para todos $x, y \in A$

Um exemplo simples de solução para (1) é $E = F = 0$, e essa solução independe do anel A. Conseguimos encontrar outras soluções atribuindo algumas características para A. Por exemplo, se A um anel comutativo, então $E=Id$ e $F=Id$, onde Id é a função identidade de A, é uma solução para o problema (1). Se A é um anel primo e não comutativo, é possível mostrar que a única solução da FI (1) é $E = F = 0$.

A teoria de FI estuda as funções que satisfazem certas identidades, como em (1).

2 | DEFINIÇÃO DE IDENTIDADE FUNCIONAL (FI)

Nesta seção, vamos definir alguns conceitos e propriedades referentes as chamadas identidades funcionais, um conceito que está em ascensão no estudo de identidades para a estrutura algébrica de anel. Neste texto, apresentaremos de um modo superficial os objetos desta teoria, alguns inclusive sem a devida introdução por conta da complexidade do assunto. Porém, indicamos ao leitor interessado em um estudo mais detalhado desta teoria, a

excelente referência [2].

Definiremos principal conceito do texto na sequência.

Sejam $X=\{x_1,y_1,x_2,y_2, \dots\}$ um conjunto enumerável e $Z\langle X\rangle$ a Z-álgebra associativa livre, livremente gerada por X, onde Z denota o conjunto dos números inteiros. Seja

$$f = f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in Z\langle X\rangle,$$

onde $m \geq 1$$ e $n \geq 0$, um polinômio tal que ao menos um de seus monômios de grau mais alto tem coeficiente 1. Seja R um subconjunto não vazio de um anel A e considere funções F_i:$R^m \to A$, $i = 1, \dots, n$. Dizemos que f é uma **identidade funcional (FI)** em com as funções $F_1, \dots ,F_n$ se

$$f(r_1, \dots, r_m, F_1(r_1, \dots, r_m), \dots, F_n(r_1, \dots, r_m)) = 0$$

para todos $r_1, \dots ,r_m \in R$. Neste caso, dizemos ainda que as funções $F_1, \dots ,F_n$ são **soluções** desta identidade funcional.

3 | EXEMPLOS DE IDENTIDADES FUNCIONAIS

Nesta seção, abordaremos alguns exemplos a respeito do conceito definido na seção precedente.

Exemplo 1: A identidade do exemplo introdutório pode ser expressa pela FI

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1 x_2 + y_2 x_1,$$

com as funções $F_1(x_1, x_2) = E(x_1)$ e $F_2(x_1, x_2) = F(x_2)$ como soluções.

Exemplo 2: Suponha que F é uma função comutativa em A, isto é, $[F(x), x]=0$, para todo $x \in A$, e isso é o mesmo que dizer que

$$f(x_1, y_1) = [y_1, x_1]$$

é uma FI em A com a própria função F como solução.

Exemplo 3: Sejam $E, F, G: A^2 \to A$ funções que satisfazem a identidade

$$[E(x, y)z + F(x, z)y + G(y, z)x, u] = 0,$$

para todos $x, y, z, u \in A$. Assim, o polinômio

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) = [y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3, x_4]$$

é uma FI em A com funções F_1, F_2 e F_3 (soluções) definidas por

$$F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_2, x_3)$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(x_1, x_3)$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = E(x_1, x_2).$$

Um exemplo de solução para esta FI é $E = F = G = 0$.

Exemplo 4: Seja F**:**$A \rightarrow A$ uma função que satisfaz

$$F(x)y + F(y)x \;=\; yF(x) + xF(y),$$

para todos $x, y \in A$. Note que a expressão acima é equivalente

$$[F(x), y] - [x, F(y)] = 0,$$

para todos $x, y \in A$. Logo, essa identidade pode ser expressa pela FI

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = [x_1, y_1] - [y_2, x_2]$$

com as funções $F_1(x_1,x_2)=F(x_2)$ *e* $F_2(x_1,x_2)=F(x_1)$ como soluções.

Uma solução desta FI é

$$F(x) = \lambda x + \mu(x),$$

onde $\lambda \in Z$ e μ**:**$A \rightarrow Z$. Aqui Z é o centro do anel A. De fato,

$$F(x)y + F(y)x = \lambda\, xy + \mu(x)y + \lambda yx + \mu(y)x = x\lambda y + y\mu(x) + y\lambda x + x\mu(y)$$

$$= y\big(\lambda x + \mu(x)\big) + x\big(\lambda y + \mu(y)\big) \;=\; yF(x) \;+\; xF(y).$$

4 | UMA IDENTIDADE POLINOMIAL VISTA COMO UMA IDENTIDADE FUNCIONAL

Um conceito bastante estudado na teoria de anéis é o de identidades polinomiais para álgebras, que definiremos para o nosso contexto na sequência.

Definição 4 (Identidade Polinomial): Sejam A um anel com identidade e $f=f(x_1,...,x_n) \in Z\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial (PI)** para A se

$$f(a_1, \ldots, a_n) \;=\; 0,$$

para todos $a_1,...,a_n \in A$.

Mais detalhes sobre este tema pode ser encontrado em [3].

Podemos relacionar as PI's com as FI's da seguinte maneira: seja A um anel, $R \subseteq A$, $R \neq \emptyset$ e $g = g(x_1, \ldots, x_m) \in Z\langle X\rangle$ uma PI em R. Podemos escrever g da seguinte forma:

$$g = f_1 x_1 + \cdots + f_m x_m,$$

onde $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)$. Denotando por F_i**:**$R^m \rightarrow A$ a função polinomial associada a f_i, para $i = 1$ e $1, \ldots, m$ considerando o polinômio

$$f = f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) = y_1 x_1 + \cdots + y_m x_m,$$

temos que a PI g pode ser vista como a FI f com funções $F_1, \ldots, F_m$ como soluções.

5 I IDENTIDADES FUNCIONAIS EM $UT_r(F)$

Nesta última seção, apresentaremos um resultado para as matrizes triangulares superiores $r \times r$ com entradas em um corpo F, que será denotada por $UT_r(F)$. Este resultado se encontra no artigo [1], de Beidar, Brear e Chebotar.

Teorema 1: Sejam r e n inteiros positivos com $r \geq 2$, $UT_r(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $r \times r$ sobre um corpo F e $f:(UT_r(F))^n \rightarrow UT_r(F)$ uma função multilinear tal que

$$[f(A, A, \dots, A), A] = 0,$$

para todo $A \in UT_r(F)$. Seja $n \leq r$ e $|F|>n+1$. Então existe $\lambda_0 \in F$ e existem funções multilineares $\lambda_i:(UT_r(F))^i \rightarrow F$, para $i = 1, \dots, n$, tais que

$$f(A, A, \dots, A) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(A, A, \dots, A)A^{n-i},$$

para todo $A \in UT_r(F)$

REFERÊNCIAS

[1] BEIDAR, K. I.; BREAR, M.; CHEBOTAR, M. A. Functional identities on upper triangular matrix algebras. **Journal of Mathematical Sciences**, v. 102, 4557-4565, 2000.

[2] BREAR, M; CHEBOTAR, M. A; MARTINDALE, W. S. **Functional Identities**. Basel: Birkhauser Verlag, 2007.

[3] DRENSKY, V. **Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra**. Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.

CAPÍTULO 10

DESDE LA FORMACIÓN PERMANENTE A LA COMPETENCIA PROFESIONAL

Data de aceite: 02/05/2022

Núria Rosich Sala
Universidad de Andorra
Andorra

Yolanda Colom Torrens
Universidad de Barcelona
España

RESUMEN: El estudio que presentamos analiza como la formación permanente del profesorado en activo influye en su competencia profesional. En este, expresamos los planteamientos iniciales que han guiado la formación y la adquisición de las competencias matemáticas y tecnológicas de profesores de secundaria en activo en la implementación del currículo (Schulman, 2005; Llinares, 2008; Niss, 2011). El curso se realizó en forma de taller con explicaciones teóricas y parte práctica realizada por los profesores. La formación se efectuó a lo largo de los tres trimestres de un curso escolar y tuvo una duración de treinta y seis horas de formación Los objetivos del curso eran: dinamizar el uso de la tecnología educativa en las clases empleando nuevas metodologías, como el "Flipeed classroom", elaborar y preparar actividades matemáticas "ricas" para sus alumnos. Dentro de estos objetivos estaba también como un punto importante el de reflexionar la implementación de estas nuevas metodologías en sus aulas de las matemáticas, y dar pautas para atender a la diversidad del aula.
PALABRAS CLAVE: Profesorado, Competencias matemáticas, Flipeed classroom, materiales.

ABSTRACT: The study that we present analyzes how the permanent training of active teachers influences their professional competence. In it, we express the initial approaches that have guided the training and acquisition of mathematical and technological skills of active secondary school teachers in the implementation of the curriculum (Schulman, 2005; Llinares, 2008; Niss, 2011). The course was carried out in the form of a workshop with theoretical explanations and a practical part carried out by the teachers. The training took place over the three terms of a school year and lasted thirty-six hours of training. The objectives of the course were: to stimulate the use of educational technology in classes using new methodologies, such as "Flipeed classroom", elaborate and prepare "rich" mathematical activities for their students. Within these objectives, it was also an important point to reflect on the implementation of these new methodologies in their mathematics classrooms, and to give guidelines to attend to the diversity of the classroom.
KEYWORDS: Mathematical skills, Flipped classroom, materials

INTRODUCCIÓN

Según el proyecto Kom "*un buen profesor de matemáticas es aquel puede fomentar eficazmente el desarrollo de competencias matemáticas con sus alumnos*" (Niss, 2011). Creemos que para conseguir llegar a fomentar eficazmente el desarrollo de competencias

matemáticas a los alumnos es necesaria la formación permanente en didáctica de las matemáticas por parte de los profesores.

Esta formación fue pensada para profesores de matemáticas de Secundaria que están llevando a la práctica una enseñanza de las matemáticas de forma competencial con todo su significado. Es decir, estos profesores están enseñando y evaluando las matemáticas por competencias. Las matemáticas están integradas en un proyecto que los alumnos han de realizar y paralelamente se realizan talleres únicamente de matemáticas con un objetivo matemático que han de solucionar o dar respuesta movilizando los recursos o contenidos matemáticos necesarios. Esto sin duda requiere que los profesores cambien la metodología de enseñanza. Por esto uno de nuestros objetivos era dar respuesta a cuáles son las actividades competenciales más apropiadas. Teniendo en cuenta que nos centraremos en tres ejes: como crear actividades competenciales matemáticas, cuál será la metodología de trabajo más apropiada y como realizaremos la evaluación.

REFERENTES TEÓRICOS

En la revisión bibliográfica vemos que existen abundantes definiciones y enumeraciones de competencias en educación. Todas incluyen de una u otra manera aspectos de las definiciones anteriores, pero en el campo de la docencia, vemos que la mayoría hace referencia al contenido matemático y cómo han de comunicar estos contenidos a sus alumnos. En cuanto a los saberes o conocimientos del profesor hemos de citar a (Shulman, 1987) que incluye los siguientes conocimientos: a) del contenido; b) didáctico general; c) del currículum; d) de sus alumnos; e) de los contextos educativos, en el cual se incluye el funcionamiento del grupo clase, la gestión, etc.; f) de los objetivos y valores educativos. (Shulman, 2005) destaca *el conocimiento didáctico del contenido* como clave, porque identifica que los conocimientos distintivos utilizados para la enseñanza, constituyen una mezcla entre la asignatura y la didáctica para enseñarla.

En cuanto a los conocimientos del profesor de matemáticas, sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Llinares, 1995), va un poco más allá al hablar de los conocimientos y saberes. Según este autor los conocimientos profesionales que deben ser gestionados por el profesor de matemáticas. La gestión de estos conocimientos, según (Llinares, 2008) debe ser secuencial y los profesores deberían interpretarlos en: "Analizar, diagnosticar y dotar de significado a las producciones de sus alumnos y comparar estas producciones con lo que él pretendía (objetivos). Planificar y organizar el contenido matemático para enseñarlo mediante planes de acción. Dotar de sentido y gestionar la comunicación matemática en el aula mediante instrumentos".

Esquemáticamente los podemos interpretar:

Ilustración1. Conocimientos de un profesor de matemáticas según Llinares

En el proyecto KOM para profesores se mencionan seis competencias que han sido fundamentales para nuestro estudio y que las hemos esquematizado de la siguiente manera:

Ilustración 2. Competencias en el proyecto KOM según Mogens Niss

Dado que nuestro estudio un aspecto importante es la formación de profesores en activo en competencias matemáticas y tecnología, un referente importante ha sido el dado por (Roig, Llinares, Penalva, 2011**)** que hacen referencia a como intervienen el uso las llamadas nuevas tecnologías aplicadas a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, proponen buscar la relación entre el diseño de entornos de aprendizaje mediado por instrumentos y el aprendizaje logrado.

Pensamos que el rasgo distintivo que caracteriza al profesor no está sólo en lo que conoce, sus dominios de conocimiento, sino en lo que hace con lo que conoce, en su conocimiento didáctico, en el uso del conocimiento en la resolución de las situaciones problema generadas en su actividad profesional, es decir en la práctica de enseñar matemáticas, en sus competencias didácticas y profesionales (Rico, 1994; Llinares, 2008; Niss, 2003). Una característica distintiva del profesor es la capacidad de diseñar o crear ambientes de aprendizaje adecuados a su época y a su contexto (Jonassen, 2000; Llinares, 2012) y en nuestro caso como va utilizar estos conocimientos en el diseño de unidades

didácticas con soporte digital.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

La metodología del curso se desarrolló en forma de taller, con explicaciones teóricas acompañadas de parte práctica. El curso se realizó a lo largo de tres trimestres del curso 2016-2017. En el primer trimestre fueron sesiones introductorias a las otras. Se pasó inicialmente un cuestionario a los profesores para poder determinar cuál era el punto de partida desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas. Y en función de las respuestas obtenidas se fue modelando la formación, teniendo en cuenta las necesidades de cada uno de ellos. Lo que pretendíamos era que fuera un curso dinámico y atrayente ya que éramos conscientes del grado de esfuerzo para los docentes de la realización de este curso de 36 horas. Se pretendía que al finalizar la formación estos se fueran a casa con trabajo realizado que les fuera útil en sus sesiones.

En el primer trimestre se trató el concepto de competencia matemática por lo que se realizó una introducción en la historia de las competencias para poder dar una visión general de este concepto. Se expusieron diferentes proyectos en los cuales se trataron las competencias y se mostraron ejemplos y formas de evaluar.

Otro de los puntos que se trataron fue el de la modelización. Se preguntó y se explicó a los profesores que entendían cuando se hablaba de modelizar y aplicar modelos, por lo que se trató el concepto de modelización matemática. Se partió primero de actividades modelizadoras sencillas que son las llamadas "*Extending Model Eliciting Activities (MEAs)"* para ver como introducir a los alumnos en diferentes problemas complejos. Las Model-Eliciting Activities son actividades de corta duración, una hora, que pueden actuar como catalizadores para la introducción de proyectos de larga duración que tratan de resolver situaciones reales mediante las matemáticas. Sabemos que las MEAs permiten a los alumnos, en grupos, desarrollar una interpretación matemática de situaciones reales y a los profesores reflexivos conocer los pasos intermedios necesarios para procesar la información y hacer un seguimiento de la ruta o itinerario que ha recorrido el alumno y ver las dificultades que han tenido. Para el diseño de sus MEAs se les dio los seis principios de (Lesh, 2000) que debían seguir: 1) La MEA tiene que permitir a el alumno reconocer la necesidad de desarrollar un modelo para interpretar los datos dados, los objetivos y las posibles soluciones; 2) Realidad, es decir, la MEA tiene que generar a los alumnos una primera impresión positiva y una predisposición para resolver el problema basado en sus experiencias y conocimientos personales; 3) Autoevaluación. Los alumnos han de juzgar ellos mismos cuando sus respuestas necesitan ser mejoradas o ampliadas y ser capaces de detectar fallos en su interpretación; 4) Documentación de la estructura, el alumno tiene que revelar cuál ha sido el camino que ha recorrido y permitir al profesor examinar que sistema ha utilizado en la resolución; 5) Compartición y reutilización de la estructura con

la voluntad de generalizar el modelo obtenido por el alumno para ser extrapolable a otras situaciones similares; 6) Prototipo eficaz, es decir, la MEA tiene que servir como un vehículo efectivo para discutir sobre diversos conceptos y conexiones matemáticas para proveer contextos más ricos y más fáciles de recordar, aprender y discutir.

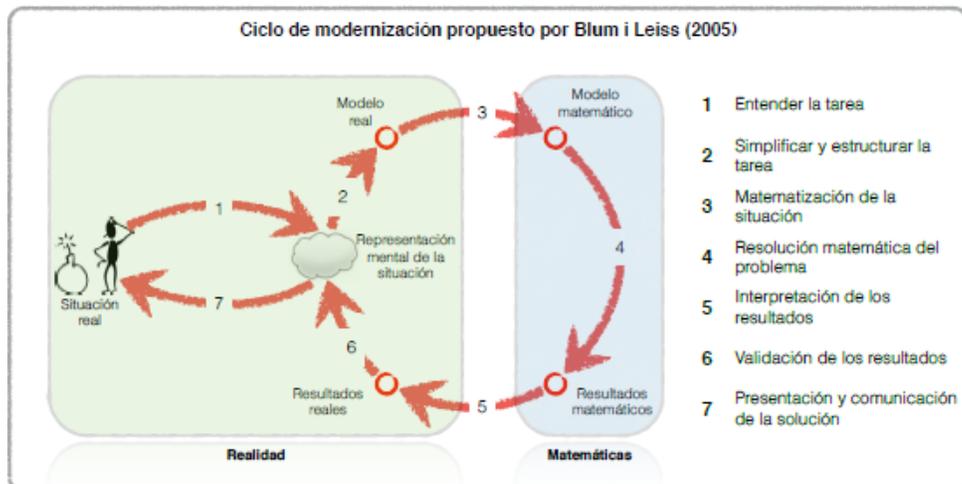
Entre las actividades que habían de realizar estaban las de determinar si eran buenas modelizaciones y el grado de dificultad que existían en función de la redacción del enunciado del problema. Se les propuso que ellos redactaran un problema contextualizado con diferentes grados de dificultad en función del tipo de enunciado.

En el segundo trimestre se trató la importancia de las imágenes en las actividades matemáticas desde las diferentes ramas de las matemáticas, también como trabajar con la metodología de la "*Flipped classroom".* Por lo que se les mostró como los alumnos de secundaria trabajan con la "*Flipped classrrom*" y cuál es la metodología más idónea para la utilización de esta. Otro aspecto que se trató fue el de elaborar sus propios materiales con los diferentes recursos tecnológicos existentes. Posteriormente se pidió a los profesores que escogieran una unidad didáctica y elaborasen esta unidad con la metodología de la Flipped.

En el tercer trimestre se elaboraron diferentes actividades matemáticas explicando las diferencias entre proyectos, matematización y "*activity eliciting*". Por lo que se pidió a los profesores que reflexionasen sobre la implementación de las nuevas metodologías de las matemáticas y que pautas creían que eran las más indicadas para poder atender a la diversidad en el aula a partir de las tecnologías actuales. Como pregunta final se les pidió que nos contestaran: ¿Qué era para ellos un buen profesor de matemáticas?

APORTACIONES DEL ESTUDIO

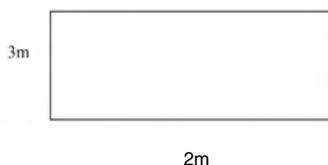
Vamos a mostrar a modo de ejemplo, algunas de las aportaciones realizadas por los profesores en las actividades realizadas y puestas en práctica en sus aulas.

Los profesores pusieron en práctica la realización de "*activity eliciting*", siguiendo los principios dados anteriormente en sus respectivas aulas y aplicando para la realización de estas actividades el siguiente modelo de modelización de Blum i Leiss (2005) que mostramos en el grafico siguiente:

A continuación, comentamos algunas de las observaciones que los docentes manifestaron después de haber realizado con sus alumnos la siguiente actividad:

Recuerdo de las vacaciones en New YorK

Después de unas vacaciones espectaculares por Estados Unidos hemos decidido ampliar nuestra mejor fotografía a un póster de grandes dimensiones que hemos hecho como recuerdo y colgarla en la pared para poder recordarlas.

Pero queremos que tengan estas proporciones:

2m

A continuación, mostramos como tres grupos de alumnos resuelven de forma diferente un mismo problema destacando las fases de una MEA.

- Un grupo realizó el problema mediante una tabla de valores con lo que se constata que comprenden el carácter lineal del problema, realizan una gráfica, aunque de forma incompleta, pero consiguen responder todas las preguntas planteadas.
- El segundo grupo consigue el modelo matemático realizando la expresión algebraica correspondiente al enunciado del problema y con los datos del problema consigue llegar a la respuesta correcta teniendo en cuenta todas las condiciones.
- Y el tercer grupo desarrollan un modelo simple que generalizan y lo reproducen hasta encontrar la respuesta a la situación similar que se les plantea.

Los profesores se han dado cuenta de que en las tareas de modelización matemática los alumnos se encuentran delante de problemas abiertos que a priori no son inmediatos. Esto les ha permitido introducir problemas matemáticos contextualizados en el mundo real que permita a sus alumnos constatar como las matemáticas están presentes en la vida cotidiana, mirar el mundo desde el punto de vista matemático.

Hemos de destacar que la dinámica de las sesiones ha sido explicativa y en parte participativa por parte de los profesores. Esto ha permitido que ellos realizasen actividades que posteriormente pueden comentar y reflexionar: sobre la idoneidad de la metodología empleada, el grado de dificultad, el tipo de actividad, su graduación y evaluación. Consideramos que la formación continua por parte de los docentes es necesaria debido a que estamos en un mundo donde los cambios tecnológicos avanzan día a día y donde la sociedad tiene la información de forma inmediata. Sin duda, la figura del profesor ha cambiado en los últimos años, no puede ser únicamente el transmisor del conocimiento ya que este conocimiento está al alcance de todos debido a las tecnologías existentes, por este motivo es necesario un cambio metodológico en la enseñanza, y los profesores han de estar preparados para este cambio.

REFERENCIAS

Blum i Leiss (2005): “Modellieren mit der “Tanken”-Aufgaben. In *Mathematic Lehren* nº128, pp.18–21.

Jonassen, D.H. (2000a). “Integrating problem solving into instructional design”. In R.A. Reiser & J. Dempsey (Eds.), *Trends and issues in instructional design and technology*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Lesh, R.; Hoover, M. ; Hole, B, Kelly, A. & Post, T. (2000). “ Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers”. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research in Mathematics and Science Education (pp. 113-149).

Llinares, *S* (1995). “Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: implicaciones en la formación de profesores de matemáticas”. En: La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal. Badajoz: Diputación Provincial de Badajoz, pp. 153-171

Llinares, S. (2008). “Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación”. III Encuentro de Programas de formación de Matemáticas Universidad Pedagógica Nacional, Santa Fe de Bogorá. Colombia.

Llinares, S. (2012). “Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea”. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, nº 2, 53-70.

Niss, M. (2003): “Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges”, Ed. L.A. Steen B.L. Madison. *Quantitative Literacy National Council on Education and the Disciplines* pp. 215-220

Niss, M (2011). “The Danish KOM Project and possible consequences for teacher education” XIII CIAEM Recife, Brasil.

Rico (1994). Educación matemática en la España del siglo XX. L Rico, M Sierra.

Roig, A,; Llinares, L.; Penalva, C. (2011). “Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea”. Educación Matemática. Vol. 23, n. 3 (dic. 2011). ISSN 1665-5826, pp. 39-65

Schulman, L (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational, Vol. 57, nº 1, pp. 1-23

Schulman, L (2005). “Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la Nueva Reforma (traducción versión 1987)”. Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado, nº9, vol, 2. México.

CAPÍTULO 11

A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES DE ORDEM 2 E SUAS IDENTIDADES POLINOMIAIS

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 19/04/2022

Mateus Eduardo Salomão
Pato Branco - PR
http://lattes.cnpq.br/9042467665583924

RESUMO: Neste trabalho será apresentado o conceito de álgebras de Jordan e de identidades polinomiais para tais álgebras. Além disso, será descrito o conjunto de identidades polinomiais para a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores de ordem 2 com entradas em um corpo (finito ou infinito) de característica diferente de 2.
PALAVRAS-CHAVE: Matrizes triangulares superiores, Álgebras de Jordan, Identidades polinomiais.

THE JORDAN ALGEBRA OF UPPER TRIANGULAR MATRICES OF ORDER 2 AND THEIR POLYNOMIAL IDENTITIES

ABSTRACT: In this work, the concept of Jordan algebras and polynomial identities for such algebras will be presented. In addition, the set of polynomial identities for Jordan algebras of upper triangular matrices of order 2 with entries in a field (finite or infinite) of characteristic different from 2 will be described.
KEYWORDS: Upper triangular matrix, Jordan algebras, Polynomial identities.

1 I INTRODUÇÃO

Uma identidade em uma estrutura algébrica é uma expressão simbólica envolvendo operações e variáveis, que é identicamente satisfeita quando as variáveis são substituídas por elementos da estrutura em questão. Como exemplo, podemos citar as leis de comutatividade e associatividade dos números reais que aprendemos em matemática básica. Neste contexto, surge a PI-Teoria, que tem por objetivo o estudo de álgebras que satisfazem identidades polinomiais. A área de PI-Teoria tem grande relevância, pois quando se conhece as identidades de uma álgebra, significativas informações a seu respeito podem ser extraídas.

Neste texto, descreveremos uma base para as identidades polinomiais para a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores sobre um corpo (finito ou infinito) de característica diferente de 2, que foram descritas por Gonçalves e Salomão em [4].

Ao leitor interessado em um estudo mais detalhado a este respeito, são indicadas as referências [1], [2] e [3].

Denotaremos por K corpo de $ch(K)\neq 2$, onde $ch(K)$ denota a característica de K, e todas as álgebras consideradas serão sobre K. Além disso, a cardinalidade de será indicada por $|K|$.

2 I AS ÁLGEBRAS DE JORDAN

Nesta seção, definiremos alguns conceitos e propriedades referentes a uma classe de álgebras muito relevantes, as chamadas álgebras de Jordan. Iniciamos definindo um conceito que será fundamental.

Definição 1: Seja A uma álgebra. Se $a,b,c \in A$, dizemos que

$$(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$$

é o **associador** de a,b e c, nesta ordem.

Se n é ímpar e $a_1, \dots, a_n \in A$, denotaremos

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, a_3), a_4, \dots, a_n).$$

Na sequência, definimos a estrutura de álgebra de Jordan.

Definição 2: Uma álgebra comutativa A é chamada de **álgebra de Jordan** se

$$(a^2, b, a) = 0,$$

para todos $a,b \in A$.

Dada uma álgebra associativa equipada com o produto $\cdot$, então o espaço vetorial A equipado com um novo produto $\circ$, chamado **produto de Jordan**, definido por:

$$a \circ b = (1/2)(a \cdot b + b \cdot a),$$

onde $a,b \in A$, é uma álgebra de Jordan, denotada por A^+.

Em seguida, será definido o conceito de identidade polinomial para álgebras de Jordan. Os polinômios apresentados na sequência são elementos da álgebra de Jordan unitária livre, livremente gerada por um conjunto de variáveis X, que será denotada por $J(X)$.

Definição 3: Sejam A uma álgebra de Jordan unitária e $f=f(x_1, \dots, x_n) \in J(X)$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** para A se $f(a_1, \dots, a_n)=0$ para todos $a_1, \dots, a_n \in A$. Denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A. Se $T(A) \neq \{0\}$ dizemos que A é uma **PI-álgebra**.

3 I AS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES E SUAS IDENTIDADES POLINOMIAIS

Nesta seção, definiremos o nosso principal objeto de estudo, a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores de ordem 2, que denotaremos por $UJ_2(K)$.

Seja $UT_n(K)$ a álgebra associativa unitária das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em um corpo K, munido com a operação usual de produto.

Definição 4: A álgebra de Jordan $UJ_n(K)$ é o espaço vetorial $UT_n(K)$ munido com o produto de Jordan $\circ$.

Estudaremos a álgebra definida acima para o caso em que n=2. Seja $T(UJ_2)$ o T-ideal de $UJ_2 = UJ_2(K)$, isto é, o subconjunto de $J(X)$ formado por todas as identidades polinomiais

de $UJ_2(K)$.

Nas duas próximas subseções, descreveremos $T(UJ_2(K))$. As demonstrações de tais fatos são extensas e podem ser encontradas em [4]. Antes de enunciar, fixaremos duas notações adotadas.

Se $f_1, f_2, \ldots, f_n \in J(X)$, então denotaremos

$$f_1 f_2 \cdots f_n = f_1(f_2 \cdots f_n).$$

Mais ainda, se $f, g \in J(X)$, $x \in X$ e $d \geq 1$, então denotaremos

$$(f, g, x^{(d)}) = \Big(f, g, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{d \text{ fatores}}\Big).$$

3.1 Identidades de $Uj_2(K)$, quando K é infinito

Nesta subseção, descreveremos $T(UJ_2(K))$ quando K é infinito de $chK \neq 2$. Por simplicidade, usaremos a seguinte notação:

Notação 1: Seja I o T-ideal de $J(X)$ gerado pelos polinômios

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_4) - x_1(x_2, x_3, x_4) - x_2(x_1, x_3, x_4),$$
$$(x_1, (x_2, x_3, x_4), x_5),$$
$$(x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6).$$

Lema 1: Se I é o T-ideal definido acima, então $I \subseteq T(UJ_2)$.

Lema 2: Seja o subconjunto de formado por todos os polinômios

a) $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$,

b) $(x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n})\left(x_t, x_u, x_l, x_u^{(s_u)}, x_{u+1}^{(s_{u+1})}, \ldots, x_n^{(s_n)}\right)$,

onde $m_1, \ldots, m_n \geq$; $t \leq e$ $t <$; $s_u, \ldots, s_n \geq$; $s_u + s_{u+1} + \cdots + s$ é par; $n \geq 0$. Então o espaço vetorial quociente $J(X)/I$ é gerado pelo conjunto de todos os elementos $h+I$, onde $h \in S$.

Teorema 1: Seja K um corpo infinito de característica diferente de 2. Se $T(UJ_2(K))$ é o T-ideal das identidades polinomiais da álgebra de Jordan $UJ_2(K)$, então $T(UJ_2(K))$ é gerado, como um T-ideal, pelos polinômios

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4),\ (x_1, (x_2, x_3, x_4), x_5) \text{ e } (x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6).$$

Mais ainda, $I = T(UJ_2(K))$, e o conjunto no Lema 2 é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/I$.

3.2 Identidades de $UJ_2(K)$, quando K é finito

Nesta subseção, descreveremos o T-ideal das identidades polinomiais de $UJ_2(K)$, para o caso em que K é um corpo finito de $ch(K) \neq 2$. Ao longa desta subseção K será um corpo finito com $|K| = q$ elementos, e $ch(K) \neq 2$.

Notação 2: Seja *I'* o T-ideal de *J*(*X*) gerado pelos 3 polinômios da Notação 1 e pelos 5 polinômios

$$(x_1^q - x_1)(x_2, x_3, x_4),$$
$$(x_1, x_2^q - x_2, x_3),$$
$$(x_1^q - x_1)(x_2^q - x_2),$$
$$\left(x_1, x_2, x_3, x_2^{(q-1)}\right) - (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1, x_2, x_3),$$
$$\left(x_1, x_1, x_2, x_1^{(q-2)}, x_2^{(q-1)}, x_3\right) - (-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(x_1, x_3, x_2^{(q)}\right) + (x_1, x_3, x_2)$$
$$- (-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(x_1, x_1, x_2, x_1^{(q-2)}, x_3\right).$$

Note que *I'* é gerado, como um T-ideal, por 8 polinômios, e $I \subseteq I'$.

Lema 3: Se *I'* é o T-ideal definido acima, então $I' \subseteq T(UJ_2)$.

Lema 4: O espaço vetorial quociente *J*(*X*)/*I'* é gerado pelo conjunto de todos os polinômios *g*+*I'* tais que:

a) $g = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ ou

b) $g = \left(x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}\right)\left(x_t, x_u, x_l, x_u^{(s_u)}, x_{u+1}^{(s_{u+1})}, \dots, x_n^{(s_n)}\right)$

onde $(m_1, \dots, m_n) \in \Lambda_n$; $0 \leq p_1, \dots, p_n < q$; $t \leq u$ e $t < l$; $0 \leq s_u < q - 1$, $0 \leq s_{u+1}, \dots, s_n < q$ e $s_u + s_{u+1} + \cdots + s_n$ é par; e $n \geq 0$. Mais ainda, se $u = t$ e su = q - 2, então $0 \leq s_l < q - 1$.

Teorema 2: Seja *K* um corpo finito com $|K|=q$ elementos, e característica diferente de 2. Se $T(UJ_2(K))$ é o T-ideal das identidades polinomiais da álgebra de Jordan $UJ_2(K)$, então

$$T(UJ_2(K)) = I'.$$

Mais ainda, o conjunto no Lema 4 é uma base para o espaço vetorial quociente *J*(*X*)/*I'*.

REFERÊNCIAS

[1] ALJADEFF, E.; GIAMBRUNO A.; PROCESI, C.; REGEV, A. **Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras**. Providence: American Mathematical Society, 2020.

[2] DRENSKY, V. **Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra**. Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.

[3] GIAMBRUNO, A; ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Providence: American Mathematical Society, 2005.

[4] GONÇALVES, D. J.; KOSHLUKOV, P.; SALOMÃO, M. Polynomial identities for the Jordan álgebra of upper triangular matrices. **Journal of Algebra.** v. 593, p. 477–506, 2022.

[5] KOSHLUKOV, P.; MARTINO, F. Polynomial identities for the Jordan algebra of upper triangular matrices of order 2. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 216, n. 11, p. 2524–2532, 2012.

CAPÍTULO 12

LUDICIDADE NO ENSINO APRENDIZAGEM: UMA ALIADA DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NA MATEMÁTICA

Data de aceite: 02/05/2022

Márcia Cristianne Ramos de Araújo
http://lattes.cnpq.br/5606446104190521

RESUMO: Os índices referentes a Educação relacionados a aprendizagem no estado de Mato Grosso mostram que é necessário criar estratégias para desenvolver as habilidades e as competências dos alunos. Nesse processo, os professores não são desafiados sozinhos e a escola deve buscar construir significado na formação de seus educadores e questionar o aprendizado e prática educacional realizada diariamente na unidade escolar. O lúdico pode ser um excelente instrumento metodológico que serve como estratégias de mudanças práticas durante as aulas de matemática. O objetivo deste estudo é de discorrer acerca de como a ludicidade (atividades de jogos) interferem com a aprendizagem dos alunos e apresentar uma pesquisa in loco realizada com sete professores do curso de Licenciatura em Matemática atuantes no Estado de Mato Grosso para compreender de que forma o lúdico está sendo associado ao processo de ensino-aprendizagem durante as aulas de matemática. Os resultados mostram que a ludicidade permanece indiferenciada. O lúdico está ligado a brincadeiras, a não formalização, que se utiliza como motivação, para introduzir o conteúdo, ou no final de uma aula para fechamento. E, atividades desse tipo quando são trabalhadas em sala de aula geram dependência do professor, pois os alunos se ocupam em solicitar o professor o tempo todo para questionar sobre o que fazer. Portanto, este estudo mostrou que a concepção de ludicidade dos professores precisa ser redimensionada a fim de que consigam explorar mais a capacidade de seus alunos para criar, propondo atividades, jogos que instiguem o seu intelecto, atividades que sejam prazerosas.

PALAVRAS-CHAVE: Educação; Ciclo; Aprendizagem.

PLAYFULNESS IN TEACHING LEARNING: AN ALLY OF PEDAGOGICAL INTERVENTION IN MATHEMATICS

ABSTRACT: The indices for Education related to learning in the state of Mato Grosso show that it is necessary to create strategies to develop students' skills and competences. In this process, teachers are not challenged alone and the school must seek to build meaning in the training of its educators and question the learning and educational practice carried out daily in the school unit. Play can be an excellent methodological tool that serves as strategies for practical change during math classes. The aim of this study is to discuss how playfulness (game activities) interfere with student learning and present an in loco research carried out with seven teachers of the Licentiate Degree in Mathematics working in the State of Mato Grosso to understand how play is being associated with the teaching-learning process during math classes. The results show that playfulness remains undifferentiated. The ludic is linked to games, non-formalization, which is used as a motivation, to introduce the content, or at the end of a class for closing. And, activities

of this type when they are worked on in the classroom generate dependence on the teacher, as students are busy asking the teacher all the time to ask about what to do. Therefore, this study showed that the teachers' conception of playfulness needs to be resized so that they can explore more the capacity of their students to create, proposing activities, games that instigate their intellect, activities that are pleasurable.
KEYWORDS: Education; Cycle; Learning.

INTRODUÇÃO

Os índices referentes a Educação mostrados no IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) comprovam que existem graves problemas relacionados a aprendizagem no estado de Mato Grosso. Grupos formais e informais podem criar equipes que produzam um ambiente adequado à aprendizagem, propiciando com isto, a interação entre todos independente das mais variadas comunidades existenciais dentro de uma Unidade Escolar, visando criar estratégias para desenvolver as habilidades e as competências que mude esses índices no IDEB no estado de Mato Grosso.

Os alunos são sujeitos no processo educacional e, assim sendo, o professor enquanto educador deve buscar produzir relações harmônicas de modo a preservar as diferenças institucionais sem, no entanto, transformá-las em desigualdades. Sendo necessário que o professor domine o conteúdo de sua disciplina e saiba transformar aquele conteúdo sem sentido aos olhares e pensamentos dos jovens estudantes em desafios propriamente dito. Para essa transformação educacional, o professor pode utilizar a aventura e a competitividade para buscar a atenção dos alunos. Nesse processo, os professores não são desafiados sozinhos e a escola deve buscar construir significado na formação de seus educadores e questionar o aprendizado e prática educacional realizada diariamente na unidade escolar. Associado a esse aprendizado, Aranha (1995, p. 2003) ressalta que a melhoria da prática somente pode ser feita pela crítica da própria prática.

Ensinar e aprender matemática pode e deve ser uma experiência com bom êxito do sentido de algo que traz felicidade aos alunos. Curiosamente quase nunca se cita a felicidade dentro dos objetivos a serem alcançados no processo ensino-aprendizagem, é evidente que são evidenciados somente o trabalho docente bem feito quando todos alcançam um grau de felicidade satisfatório. Corbalán (1994) menciona que o lúdico é um excelente instrumento metodológico que serve como estratégias de mudanças práticas durante as aulas de matemática.

O lúdico tem sua origem na palavra "*ludus*" que quer dizer jogo, a palavra evoluiu levando em consideração as pesquisas em psicomotricidade, de modo que deixou de ser considerado apenas o sentido de jogo e passando a ser considerado como parte da atividade humana caracterizando-se por ser espontâneo, funcional e satisfatório. Na atividade lúdica não importa somente o resultado, mas a ação, o movimento vivenciado. O significado da palavra **lúdico** se origina do latim *ludus* que denota brincar. Portanto, o objetivo é discorrer

acerca de como a ludicidade (atividades de jogos) interferem com a aprendizagem dos alunos e apresentar uma pesquisa realizada com sete professores do curso de Licenciatura em Matemática atuantes no Estado de Mato Grosso para compreender de que forma o lúdico está sendo associado ao processo de ensino-aprendizagem durante as aulas de matemática.

OS PRIMÓRDIOS DO LÚDICO

O lúdico é a brincadeira, é o jogo, é a diversão e o brincar esteve presente em todas as épocas da humanidade, mantendo-se até os dias atuais (SANTANNA e NASCIMENTO, 2011). Em cada época, conforme o contexto histórico vivido pelos povos e conforme o pensamento estabelecido para tal, sempre foi algo natural, vivido por todos e também utilizado como um instrumento com um caráter educativo para o desenvolvimento do indivíduo (SANTANNA e NASCIMENTO, 2011; KISHIMOTO, 2017).

Na história antiga há relatos de que o ato de brincar era desenvolvido por toda a família, até quando os pais ensinavam os ofícios para seus filhos. Ressalta-se que para cada época e sociedade a concepção sobre educação sempre teve um entendimento diferenciado, logo o uso do lúdico seguiu tal concepção. Os povos primitivos davam à educação física uma importância muito grande e davam total liberdade para as crianças aproveitarem o exercício dos jogos naturais, possibilitando assim que esses pudessem influenciar positivamente a educação de suas crianças.

Historicamente, Platão, já em meados de 367 a.C., apontou a importância da utilização dos jogos para que o aprendizado das crianças pudesse ser desenvolvido. Afirmava que em seus primeiros anos de vida os meninos e meninas deveriam praticar juntos, atividades educativas através dos jogos. Rabelais, no século XV, já proclamava que o ensinamento deveria ser através dos jogos, dizendo a todos que deveriam ensinar às crianças o gosto pela leitura, pelo desenho, pelos jogos de cartas e fichas que serviam para ensinar a aritmética e até mesmo a geometria. Outros teóricos também contribuíram para que o lúdico pudesse ser utilizado na educação dentro do processo de ensino e aprendizagem, sendo destacados aqui neste estudo Rousseau e Pestalozzi, no século XVIII; Dewey, no século XIX; e no século XX, Montessori, Vygotsky e Piaget (SANTANNA e NASCIMENTO, 2011; FONSECA e DIAS, 2017; ROSA, 2018; PEDREIRA et al., 2018).

Segundo as teorias de Vygotsky o ser humano se desenvolve a partir do aprendizado, que envolve a interferência direta ou indireta de outros seres humanos, sendo que a mediação faz a diferença, interferindo na relação de aprendizagem da criança e fazendo com que as funções psicológicas superiores se desenvolvam no ser humano. Cita que o jogo é um instrumento importante para esse desenvolvimento, sendo que os jogos e suas regras criam nos alunos uma zona de desenvolvimento proximal (ZDP), proporcionando desafios e estímulos para a busca de conquistas mais avançadas, ensinando também a

separar objetos e significados (CINTRA, 2010; PEREIRA, 2021).

Vygotsky explica que a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) é o percurso que o ser humano faz até chegar a um nível de amadurecimento real, sendo chamado por ele de zona de desenvolvimento real (ZDR) que é a capacidade do ser humano realizar tarefas independentes. Ao utilizar o lúdico para o ensino da matemática o professor está mediando o aprendizado dos alunos que, a partir da ZDP pode efetivamente adquirir um conhecimento, proporcionando alterações em sua estrutura cognitiva (FREITAS et al., 2001; SANTANNA e NASCIMENTO, 2011; MONTEIRO, 2013; ARANHA, 2016).

Piaget (1973) confere ao jogo um papel essencial para o desenvolvimento infantil; acredita que ao jogar as crianças assimilam e transformam a realidade. Propõe uma subdivisão dos jogos, por faixa etária, sendo elas: a) Primeira etapa: para crianças de zero a dois anos de idade que ele chama de período sensório-motor, as crianças repetem situações simplesmente por prazer; b) Segunda etapa: para crianças de dois a sete anos que ele chama de período pré-operatório em que as crianças não fazem o exercício mental, mas sim a representação do ocorrido; e c) Terceira etapa: para crianças acima dos sete anos, que ele chama de período operatório em que os jogos são de regras. É a união dos outros dois jogos, explorando, neste caso, a coletividade para o ato de jogar, sendo importante a cooperação entre as crianças (SPINOLA, 2018; DA SILVA e BIANCO, 2020).

A utilização do lúdico na educação tem também, além do objetivo de desenvolver o aprendizado de forma mais atrativa para o aluno, o objetivo do resgate histórico-cultural dessas atividades. É um ótimo momento para o reconhecimento do seu histórico familiar e de sua cultura regional. As pessoas adquirem desde criança as mais diferentes formas de conhecimento: seja popular, cientifico, cultural, religioso, aprendendo-as de maneiras e objetivos diferentes, mas com algo comum para todos os seres, independentemente de suas origens, é lúdico e ilusório e o mundo do adulto se abstém de ludicidade, sendo realista (ANTÔNIO JUNIOR, 2014).

O ensino da matemática deve ser desenvolvido de forma que o aprendizado seja significativo, com metodologias que estejam ligadas a vivencia dos alunos. A aquisição e a retenção de conhecimentos são atividades profundas e de toda uma vida, essenciais para o desempenho competente, a gestão eficiente e o melhoramento das tarefas cotidianas (AUSUBEL, 2000). A aprendizagem significativa foi utilizada para o aprendizado dos povos passados dentro das suas reais necessidades e buscando alcançar os objetivos da sociedade moderna. Os modelos de ensino trazem a mesma espinha dorsal desde os primórdios até os dias atuais. Mudanças sistemáticas aconteceram justamente na forma como se desenvolve esse ensino, mas com a perda das maneiras suaves, alegres, felizes, objetivas, que uma criança mereça aprender (MOREIRA, 2005).

Na Grécia antiga era através dos jogos que se passava ensinamento às crianças. Os índios ensinavam e ensinam seus costumes através da ludicidade. No Brasil da Idade Média, os jesuítas ensinavam utilizando brincadeiras como instrumentos para a

aprendizagem. Desde os primórdios, a metodologia lúdica sempre foi valorizada pelos povos, sejam quais forem, e a inquietação torna-se justamente a de: será que nos dias atuais esse instrumento, já ratificado por diversos autores de renome, está sendo valorizado no ensino, principalmente no ensino da matemática (SANTANNA e NASCIMENTO, 2011).

Há bases de conhecimento que formam um conjunto adquirido desde os primórdios e que devem ser valorizados e aplicados no ensino. A utilização da ludicidade como instrumento metodológico para o ensino das crianças é um desses ensinamentos que não se perde com o passar dos tempos. O aprendizado matemático de maneira quando é usado de maneira espontânea, pode se tornar um processo ativo de aprendizagem e significativo. Nessa concepção, a criança é um ser em pleno processo de apropriação da cultura, precisando participar dos jogos de uma forma espontânea e criativa (KISHIMOTO, 1990; SILVA, 2015).

A HISTÓRIA DO LÚDICO NO BRASIL

Os índios, os portugueses e os negros foram os precursores dos atuais modelos e maneiras de desenvolvimento do lúdico que mantemos até hoje, no Brasil (OLIVEIRA, 2017). Os jogos e brincadeiras são originários dessa miscigenação que ocorreu nesse período, mas é incerto afirmar de qual povo exatamente seriam suas origens. O que devemos ressaltar é justamente que, o que tem são jogos e brincadeiras que ficaram como herança dos povos antepassados e que devem ser preservados, valorizados e utilizados para o ensino dos nossos alunos, sempre estimulando o resgate histórico que merece cada um deles (BERNARDES, 2005).

Nos últimos séculos, houve no Brasil, uma grande mistura de povos e raças, cada qual com suas culturas, crenças, educação. Umas diferentes das outras e também com sua forma de desenvolvimento da ludicidade entre seus pares; todavia essa herança torna nosso país ainda mais rico do ponto de vista cultural e educacional. Toda herança cultural e educacional deve ser utilizada para o aprendizado universal dos alunos, haja vista que no Brasil há várias etnias, raças e povos (SANTANA; NASCIMENTO, 2011).

Os negros também trouxeram seus costumes, semelhante aos dos índios, sendo necessária, desde criança, a construção de seus próprios brinquedos, saber pescar, nadar, caçar. Os filhos dos portugueses quando vieram para o Brasil não tinham seus contatos com a ludicidade como atos para a sobrevivência, o tinham como ato de lazer e para seu enriquecimento intelectual. Seus costumes, trazidos de Portugal, eram totalmente diferentes dos existentes no Brasil dos índios e dos trazidos pelos negros, em suas bagagens, nos navios negreiros da África (BERNARDES, 2005; RAMOS; DE MORAES, 2011).

Já no final da Idade Média e início da Idade Moderna em meados do século XV a Igreja Católica, tornou-se responsável por extinguir os jogos da educação por considerar o jogo algo profano. Seu uso para o ensino volta a ter destaque logo em seguida com os

jesuítas, mas que não se perpetuou, pois em meados de 1758 os jesuítas foram expulsos e o Brasil ficou sem nenhum sistema organizado de ensino. Hora ou outra vinham professores enviados de Portugal para ministrar cursos, tais como o curso de álgebra, segundo uma carta régia de1799, sobre o ensino de matemática no Brasil (SILVA et al., 2016).

Durante o século XX, propostas ligadas a Pedagogia Nova ajudaram a estruturar um novo olhar para o ensino, diferenciado do Positivismo e o Tecnicismo do Ensino de Ciências. Pois, o aprender fazendo, a pesquisa investigatória, o método da redescoberta, os métodos de solução de problemas como também as feiras e clubes de ciências foram às grandes mudanças ocorridas para um ensino que até então não tinha essa preocupação (PEREIRA, 2007).

A Revolução de 1930 que pôs fim à Primeira Republica, se tornou um dos movimentos mais importantes no Brasil, e também para a educação brasileira. A educação deveria cumprir para sua realização, coerentemente com o seu horizonte ideológico. Foi então criado o Ministério da Educação e da Saúde, tendo Francisco Campos, o primeiro Ministro da Educação. Esse olhar para a educação surgiu a partir da necessidade do sistema econômico, pois a Revolução de 30 ficou marcada pela abertura do Brasil para o mundo capitalista de produção, e o Brasil, por ter acumulado muito capital até então, passou a investir no mercado interno e na produção industrial. A partir daí abriram-se as portas para investimentos na educação para a formação de mão de obra especializada para atuar nesse mercado e indústrias (SANTANA; NASCIMENTO, 2011).

Em 1932 foi lançado por um grupo de educadores, o Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova, dirigido ao povo e ao governo, o documento apresentava a diversidade teórica e ideológica do grupo que o concebeu e na promulgação da nova Constituição em 1934 que após a reforma o currículo do ensino secundário passou a ser seriado, com frentes de aritmética e a geometria inseridas nos estudos da disciplina de matemática (SANTANA; TAFFAREL, 2016).

Da década de 30 até a década de 50, quase não houve alterações no ensino da matemática. Somente em 1955, com a realização do I Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática em Salvador, é que foi reconhecido que o currículo secundário precisava ser atualizado, com o propósito de ser mais entrosado com o conteúdo do ensino universitário. Pelo mundo afora ocorria o mesmo movimento, mas com outros interesses (MARQUES, 2021). A Matemática Moderna trazia como proposta a eliminação do ensino da matemática baseado na memorização de regras e no treino de algoritmos, introduzindo a teoria dos conjuntos na tentativa de unificar a linguagem dos vários ramos da matemática, mas mantendo o foco nos procedimentos e isolando a geometria (CARVALHO, 2017).

No Brasil vários grupos de estudos foram constituídos para estudar a matemática moderna, entre estes estão o Grupo de Estudos Ensino da Matemática (GEEM, São Paulo), o Grupo de Estudos Matemática de Porto Alegre (GEMPA, Porto Alegre) e Grupo de Estudos e Pesquisas de Matemática (GEPEM, Rio de Janeiro). O Ministério da Educação e Cultura,

nome atribuído a partir de 1953, quando foi criado o Ministério da Saúde (desmembrando a estrutura até então do ministério da educação e da saúde pública), apoiou discretamente as mudanças provocadas pela matemática moderna. Somente em meados dos anos 70 é que temos a criação de um movimento chamado de Movimento de Educação Matemática, com grupos de matemáticos e especialistas, organizados para estudos e pesquisas. Todos esses especialistas tinham o mesmo pensamento de que o ensino de matemática, como vinha sendo realizado, estava ultrapassado. Passaram a estudar a psicologia de desenvolvimento do conhecimento da criança, além de como fazer para avaliá-las de maneira diferente da até então aplicada pelos professores, levando em consideração para o ensino da matemática, a realidade vivida pelos alunos e que esta influía na sua aprendizagem (MOTA, 2009; SANTANNA e NASCIMENTO, 2011).

Foram publicadas várias técnicas e métodos para o ensino da matemática, de acordo com pesquisas e estudos realizados por matemáticos e especialistas desse movimento, os quais defendiam que a resolução de problemas, ao contrário do mecanicismo, ajudava os alunos a compreenderem os conteúdos matemáticos, devendo então ser aplicados antes dos conteúdos. Outros estudiosos defendiam a utilização da modelagem para o ensino da matemática, ou seja, que ao invés do professor partir das teorias matemáticas para o ensino, que a realidade dos alunos fosse levada para dentro da escola, dentro da sala de aula e que as situações vividas pelos alunos fossem utilizadas como exemplos para o desenvolvimento da aprendizagem matemática (SANTANNA e NASCIMENTO, 2011).

Foi feito um movimento importante e fundamental para que os professores ao ensinar matemática levassem em consideração às experiências vividas pelos alunos denominada etnomatemática. D’Ambrósio (2003) destaca que há a valorização demasiada por parte dos professores, do ensino formal, sem que possam se desprender dele para um aprofundamento maior na etnomatemática. Inclui-se na defesa do movimento de educação matemática a utilização dos computadores, mesmo que a título precário, mas que pudesse ser pensado, pois na época esse instrumento não era tão acessível como nos dias atuais, mas servia como instrumento para o ensino da matemática, principalmente para a utilização de jogos na relação de ensino e aprendizagem matemática (SANTOS, 2015).

Com a Agenda para Ação, documento que foi produzido nos anos 80 pelo *National Council of Teachers of Mathematics* — NCTM —, dos Estados Unidos, novas propostas para a melhoria do ensino de matemática foram trazidas para a discussão, propostas como a utilização de resolução de problemas como mecanismo de aprendizagem significativa. No final do século XX, já nos últimos anos houve um avanço significativo no Brasil, com a publicação dos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) com um material muito bem elaborado e disponibilizado pelo Ministério de Educação. A proposta do ensino da matemática foi elaborada por profissionais do Movimento de Educação Matemática, com objetivos totalmente diferentes dos propostos em documentos anteriores, conforme traz o próprio PCN da área de matemática (PCNs, 1997).

Contudo diante de todas as contribuições históricas, o uso do lúdico no ensino da matemática embora tão utilizado em todas as épocas, perpassando por vários sistemas, ficou fortalecido com os estudos e pesquisas das áreas das ciências humanas que tratam do desenvolvimento cognitivo da criança. Com o Movimento de Educação Matemática nas últimas décadas do século XX e as teorias das Ciências Humanas para o ensino e aprendizagem, o uso do lúdico para o ensino da matemática se tornou mais valorizado como instrumento metodológico (MATTOS, 2009; SANTANNA e NASCIMENTO, 2011; SANTOS, 2012).

A FORMAÇÃO DO PROFESSOR E O LÚDICO

A formação dos professores deve acompanhar tais mudanças estruturais do ensino da matemática estreitando a relação entre as teorias que propõem tais mudanças com a prática docente (DAVID; MOREIRA, 2013). Desde a época da matemática moderna, faltavam investimentos para a formação do professor dificultando assim os avanços necessários para tal estreitamento. Há um distanciamento entre o ensino proposto pelos PCNs e o praticado em sala de aula, o que torna essa prática sem rumo quanto aos seus parâmetros (SANTOS et al., 2015).

O uso da etnomatemática, da modelagem matemática, da resolução de problemas relacionais, o lúdico matemático, a tecnologia como instrumento, precisa ser algo comum da prática docente. Uma política efetiva de formação para os professores possibilita a estes uma imersão nos métodos e técnicas de ensino e estes possibilitam um aprendizado matemático significativo. Este aprendizado deve contribuir para tornar o aluno um sujeito crítico, intelectual, voraz para a busca de uma sociedade justa, onde seus conhecimentos advindos do seu processo de desenvolvimento educacional possam de fato inseri-lo na sociedade como um ator principal de transformações. Pensadores como Piaget, Wallon, Dewey, Leif, Vygotsky, defendem que o uso do lúdico é essencial para a prática educacional, no sentido da busca do desenvolvimento cognitivo, intelectual e social dos alunos. Considerando que os jogos estão presentes nas vidas, não só da criança, mas também dos adultos, isto os torna instrumentos que podem ser utilizados para o desenvolvimento de qualquer pessoa e, portanto, deve ser levado em consideração pelos educadores em qualquer nível de ensino (SANTANA; NASCIMENTO, 2011; JUNIOR, 2018).

Destarte, o professor tem um papel fundamental a partir de então para que explore as atividades lúdicas, com o objetivo de que seus alunos possam ter um aprendizado matemático significativo, sem que tais atividades percam as suas essências, mas que resultem no objetivo esperado. D'Ambrósio (1993), sugere que o professor de matemática, para as perspectivas atuais, deva ter visão da matemática como disciplina investigativa e inserida no cotidiano; visão da atividade matemática como investigativa; visão da aprendizagem matemática como propiciadora do desenvolvimento cognitivo do aluno; além de enxergar o

que deve ser um ambiente propício ao aprendizado do aluno, com perspectiva de estimulo de atitudes críticas, por parte do aluno, com relação ao conhecimento matemático.

A respeito desse tipo de aprendizagem D'Ambrósio (2018) discute que "é impossível negar que precisamos de um novo pensamento dentro da Educação Matemática". O ensino da matemática pode e deve ser realizado dentro de um espaço escolar propositivo, no sentido da diversão e, sério quando esta diversão está intimamente ligada aos objetivos a serem alcançados no processo de ensino e de aprendizagem. A produção passa a ser um componente de esforço e de desafio automático, possibilitando a construção e reelaboração do conhecimento por parte dos alunos.

Assim, a tarefas de aprendizagem por memorização, como é óbvio, não se levam a cabo num vácuo cognitivo. Pode relacionar-se com a estrutura cognitiva, mas apenas de uma forma arbitrária e literal que não resulta na aquisição de novos significados (AUSUBEL, 2000). Assim, é fundamental que o professor tenha pleno domínio do que está propondo e, para isso, a sua formação deve proporcionar que seus conhecimentos sejam explorados através do uso do lúdico, assim como a familiarização com tal instrumento. Para que a aprendizagem seja realmente significativa, Ausubel (2000), afirma que o conteúdo adquirido tem que estar claro, preciso, e deve haver competência em transferi-lo a situações novas, diferentes daquelas que foram usadas para o seu ensino. Desse modo, o professor ao conseguir definir conceitos, discorrer sobre eles ou mesmo resolver problemas complexos, precisa fazer com que tudo isso se transforme ao propor o mesmo processo aos seus alunos, de que a aprendizagem seja realmente significativa.

E, a utilização dos jogos deve ser somente quando o conteúdo matemático permitir e que seja um instrumento metodológico eficiente na busca do conhecimento por parte dos alunos (ANTUNES, 1998; GRANDO et al., 2000). Sem o conhecimento prévio da ferramenta, bem como suas aplicabilidades, o professor fica refém de cometer um erro grave na formação de seus alunos e para não discorrer de tal erro, é fundamental que sua formação lhe propicie tal conhecimento. Faz-se necessária uma reflexão sobre a importância da utilização do lúdico como instrumento metodológico no ensino da matemática e os resultados que proporcionarão um bom aprendizado ao aluno (TENÓRIO et al., 2010; SANTANNA e NASCIMENTO, 2011).

Todos os aspectos relacionados com o desenvolvimento cognitivo devem ser levados em consideração e que o aspecto afetivo, hoje algo distante de muitas realidades de convívio social, esteja implícito no ato de brincar, uma vez que o elemento mais importante é o envolvimento do indivíduo que brinca, condição essencial para o início da abertura do interesse em adquirir novos conhecimentos. Portanto, para se ensinar matemática, o professor deve saber desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas dos alunos. E o uso do lúdico como instrumento metodológico para o ensino da matemática necessita de que o professor não estaciona em uma única prática em sala de aula e busque sempre mudanças para que

aconteça a melhoria substancial na qualidade do ensino da matemática.

A FORMAÇÃO DOS FORMADORES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E A LUDICIDADE -ALGUMAS QUESTÕES SOBRE A FORMAÇÃO DOS FORMADORES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

A pesquisa foi realizada com sete professores do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição. Esses sujeitos fazem parte de dois grupos: os da formação específica que trabalham com os temas de Matemática, e que são no total de cinco; e dois da formação comum que, que lidam com as questões pedagógicas da formação do professor em geral e do professor de Matemática.

Ao analisar a formação de formadores do curso de licenciatura utilizando a ludicidade, em um primeiro momento houve a verificação acerca da concepção dos sujeitos em relação ao que vem a ser lúdico. As categorias para classificar os níveis de concepção dos sujeitos quanto a diferenciação ou a indiferenciada de três elementos: material, atividade e o conceito de lúdico em ludicidade, pois utilizá-los não significa que haja prazer. Assim, durante o desenvolvimento da pesquisa constatou-se que:

a) Entre os sete professores, 29% dos sujeitos diferenciam a concepção de ludicidade e sua utilização, ou seja, associavam o lúdico a brincadeiras, material, recurso, dinâmicas, uma concepção do senso comum. Eles diziam aos seus alunos o que deveria ser feito, e, propuseram atividades que não tinham o caráter investigativo, estavam no contexto da representação. As dinâmicas, também ficaram no campo da representação e a resolução de problemas foi proposta como uma forma de animação, motivação.

b) Cerca de 14% dos sujeitos diferenciam os três elementos: esse sujeito acredita que a ludicidade esteja ligada a dois aspectos: primeiro a questão do prazer e segundo questão do desafio. A sua concepção sobre ludicidade engendra a aprendizagem e está ligada ao prazer de fazer a atividade proposta, em buscar, investigar, o desafio à criatividade do aluno e do professor, de acordo com a concepção de lúdico apresentada nesta pesquisa. Esse professor tem 30 anos de magistério, deu aula nas séries iniciais, ensino fundamental e médio, e propôs atividades aos alunos, do curso de matemática, de investigação, de desafio, atividades que produzem a aprendizagem.

c) Quanto aos 57% dos sujeitos que fazem a diferenciação entre um ou dois elementos, temos: há uma confusão com brincar, atividade de laboratório, aplicação de jogos, levar prazer ao aluno. Assim concebida, a ludicidade permanece indiferenciada, propiciando uma visão um tanto quanto equivocada, pois um jogo pode não ser prazeroso. É importante que os sujeitos entendam que o prazer em aprender pode estar na resolução de um exercício, de um problema, de uma atividade e não necessariamente no ato de brincar, de jogar em si. E que não somos nós que levamos prazer ao aluno, mas que é a atividade proposta em si que irá proporcionar prazer ou não. As atividades de laboratório, geralmente, têm um roteiro

> a ser seguido, o que não deixa de ser interessante, desde que seja para desafiar os alunos a fazer investigações, e não como um mero exercício escolar. Atividades desse tipo geram dependência do professor, pois os alunos se ocupam em solicitar o professor o tempo todo para questionar sobre o que fazer.

A aplicação de jogos para exercitar, fixar o conteúdo ou para introduzi-lo e depois de jogar é momento de formalizar é uma visão conteudista, que separa reflexão de ludicidade, é como se por meio dela não pudéssemos refletir sobre o conteúdo apresentado. Assim sendo, é necessário repensar a ludicidade com o intuito de que ela seja utilizada o tempo todo, não somente como motivação ou no início da aula, mas como desenvolvimento da aula toda. Pensar o lúdico como vinculado à formalização porque brincando também se aprende e na escola é possível fazer isso, é prática que deveria ser feita pelos formadores de formadores.

Também ficou evidente a falta de divulgação e acesso dos sujeitos a materiais pedagógicos e atividades lúdicas para se trabalhar no ensino superior, 57% dos sujeitos afirmaram que, para trabalhar, eles têm que criar os seus recursos e atividades, pois para o ensino superior é muito restrito esse tipo de material. Entretanto, para criar é preciso que os professores tenham condições para isso, e proponham atividades que levem seus alunos a pensar.

Quanto à diferença entre se trabalhar com materiais lúdicos com crianças e com jovens e adultos, 43% dos sujeitos afirmaram que não há diferença. Contudo, sabemos que o processo ensino-aprendizagem do adulto é diferente do da criança. Suas estruturas mentais são diferentes, pois o adulto vive uma outra etapa do desenvolvimento.

Alguns sujeitos afirmaram que aplicar a ludicidade no ensino superior seria como resgatar a criança que há no adulto. Então, por que não trabalhar com o lúdico no ensino superior? Os sujeitos afirmarem que quando vão trabalhar com atividades que consideram lúdicas, há uma certa resistência por parte dos alunos adultos. Questionamos se essa resistência estaria ligada à valorização do formal, do científico. A escola, enquanto instituição social, pode perfeitamente trabalhar de forma lúdica, isso não significa desvalorização do formal.

Quanto à sistematização da aula: ela deve ser feita sempre no final? Foi o que encontramos na filmagem com 100% dos sujeitos. Todavia, acredita-se que o sistematizar, organizar, explicar pode ser feito durante a atividade, não sendo obrigatório parar para fechar a aula. Essa prática tem a ver com a tradicional.

Em relação à profissão do formador encontraram-se 29% dos sujeitos exercem outras profissões, além do magistério, e que também 29% não têm a formação pedagógica para o magistério, pois sua área de formação é outra. O que também fica evidente na fala do sujeito G:

Sujeito G: [...] E acho que a minha área de estudo, de dedicação hoje é muito maior (...) eu também vou pouco em busca das questões da área de matemática. (...) Eu acho

até que muito das minhas opiniões eu fico receosa de dá em relação à matemática, (...) o meu tempo, a minha dedicação, o meu estudo, o meu ir além não vai muito mais pra área de matemática. (...) Quem sabe até parar para pensar isso aqui hoje com você me faz até repensar será que eu não precisava ir mais fundo nisso, mas eu acho que no fundo eu sei que precisava, mas que não dá para fazer tudo.

Para esse Sujeito G, essa não é a sua maior área de estudo, de dedicação, o que se confirma por meio dos dados de sua formação continuada, pois esta é em outra área. Nosso estudo permitiu que ele tomasse consciência da necessidade de repensar a sua prática pedagógica, pois os professores são responsáveis pela criação de atividades e experiências para seus alunos e essa variação irá depender da capacidade que possuem esses professores em ensinar de acordo com aquilo que acreditam. Ao buscar indicativos para a Formação de Formadores de Professores de Matemática utilizando como referência a ludicidade, nosso estudo nos permitiu chegar a algumas conclusões que nos parecem bastante significativas.

A despeito do que concebemos como ludicidade, encontramos sujeitos que conjugam de ideias semelhantes, por exemplo, vendo que a ludicidade está relacionada ao prazer, independente se é um jogo ou uma brincadeira. Um prazer também ligado ao desafio, ao gostar de fazer, que instiga, que provoca os alunos. Todavia, ficou confirmado que a maioria dos sujeitos ainda concebe a ludicidade como um jogo, brincadeiras, utilização de recursos, dinâmicas, atividade prática. Acreditamos que isso ocorre pelo fato de se ligar o lúdico a material concreto ou pedagógico. Evidenciou-se também uma confusão de ludicidade com material concreto, com jogos e brincadeiras em sala de aula, com metodologia, com espontaneidade, com uma atividade coletiva em que há interação, a avaliação, a não formalização, a vivência, a aplicação.

CONSIDERAÇÔES FINAIS

Este estudo permitiu-nos inferir que a concepção de ludicidade dos professores precisa ser redimensionada a fim de que consigam explorar mais a capacidade de seus alunos para criar, propondo atividades, jogos que instiguem o seu intelecto, atividades que sejam prazerosas. Assim sendo, entendemos que essa mudança de concepção sobre a ludicidade perpassa pela ação transformadora do professor em promover alterações nas suas práticas pedagógicas cotidianas. Dada a escassez de material lúdico para o nível superior não estaria na hora de começarmos a criar isso? O professor sozinho se sente sobrecarregado, tudo deve sair de seus próprios recursos. Não seria o caso de grupos começarem a se organizar para pensar em atividades e materiais para adotar a ludicidade como ferramenta de trabalho no ensino superior? A partir da análise processada surgiu a questão da formalização dos conteúdos.

Ficou evidente que para a maioria dos sujeitos, o lúdico está ligado a brincadeiras,

a não formalização, que se utiliza como motivação, para introduzir o conteúdo, ou no final de uma aula para fechamento. E que somente depois de fazer a atividade lúdica é hora de sistematizar, de formalizar o conteúdo. Esse tipo de procedimento mostra uma fragmentação do processo ensino-aprendizagem. Novamente aqui ressaltamos a ação transformadora do professor no sentido de desencadear atividades que valorizem o prazer de aprender mesmo no ensino superior.

Houve constatação na prática da existência de uma confusão da utilização do lúdico com materiais pedagógicos; um material pedagógico em si não é necessariamente lúdico. Para que esse material desperte o interesse dos alunos é necessário que o professor proponha um jogo, elabore atividades que lhes proporcionem investigarem, que desafiem o seu intelecto, que lhes deem prazer ao fazer. Quanto à necessidade de os alunos chamarem os professores o tempo todo na realização das atividades propostas, pensamos que isso acontece ou porque essas não estão adequadas ao pensamento dos mesmos, ou seja, sua estrutura mental ainda não está adequada ao proposto, ou por falta de clareza na formulação da questão ou de seus objetivos. Isso significa que se as pessoas preferem que lhes digam o que fazer o tempo todo, e, se têm comportamentos de dependência correm o risco de se tornarem ainda mais obedientes e submissas; propor atividades lúdicas que levem os alunos a pensar as ajudaria no sentido de romper com essa dependência.

Quanto ao resgate da ludicidade no ensino superior, para os adultos, acredita-se que, pelas condições da sociedade atual, realmente o homem tenha perdido essa parte da dimensão humana que é o brincar, e que nesse momento de sua formação é preciso fazer um resgate dessa condição humana. Precisa-se romper com esse mito criado pela sociedade de que ao brincar não estamos sendo sérios. Entretanto, não basta refletir que é preciso repensar o lúdico, é necessário por isso em prática.

É possível que a resistência dos estudantes à aplicação de atividades lúdicas seja pela não convivência com as mesmas e que o ensino superior, em especial o de matemática, seja momento para formalizações e que esse ensino não pode ser feito de outra forma, já que aprenderam que brincar é diferente de estudar, que estudar dá trabalho. Entretanto, o aprender pode vir a ser prazeroso e isso não quer dizer que não tenha que ser trabalhoso. Se o ensino superior conseguir fazer isso com os futuros professores eles terão a oportunidade de trabalhar de forma diferenciada com seus alunos. Nosso estudo também sinaliza que o ensino superior precisa deixar de ser simplesmente um lugar para áridas formalizações, onde o conteúdo lógico-matemático continua sendo transmitido como se fosse um conhecimento social. A partir dos resultados de nossos estudos, acredita-se que a ludicidade pode ser um caminho para a aprendizagem significativa da matemática e advogamos a favor de que o professor do ensino superior, o formador de formadores, faça uso da mesma, resguardadas as características mentais, afetivo-sociais e culturais do aluno dos cursos de graduação.

REFERÊNCIAS

ANTÔNIO JUNIOR, Wagner. **Jogos digitais e a mediação do conhecimento na perspectiva da psicologia histórico-cultural**. 2014. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

ANTUNES, Celso. **Inteligências Múltiplas E Seus Estímulos (as)**. Papirus Editora, 1998.

ARANHA, Edilene Albuquerque. O desenvolvimento da linguagem e pensamento da criança na visão de Piaget e Vygotsky. 2016.

ARANHA, Maria Salete Fábio. Integração social do deficiente: análise conceituale metodológica. **Temas em psicologia**, v. 3, n. 2, p. 63-70, 1995.

AUSUBEL, David Paul. **The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view**. Springer Science & Business Media, 2000.

BERNARDES, Elizabeth Lannes. Jogos e brincadeiras: ontem e hoje. **Cadernos de história da educação**, v. 4, 2005.

CARVALHO, Carlos Augusto Santos. **Aspectos relevantes para uma história da evolução do currículo de Matemática na segunda metade do século XX: o caso do Colégio de Aplicação da UFRJ. 2012. 258 f**. 2017. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)–Departamento de Ciências Matemática e da Natureza, UFRJ, Rio de Janeiro, 2012. Disponível em:< http://www. pg. im. ufrj. br/pemat/44% 20Carlos% 20Augusto% 20Carvalho. pdf>. Acesso em: 25 maio.

CINTRA, Rosana Carla Gonçalves Gomes. A historidade do lúdico na abordagem histórico-cultural de Vigotski. **Rascunhos Culturais**, v. 1, n. 2, p. 225, 2010.

CORBALÁN, Fernando. **Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato**. Síntesis, 1994.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. **Estudos avançados**, v. 32, p. 189-204, 2018.

DA SILVA, Joselia Cristina Siqueira; BIANCO, Gilmene. Jogos didáticos: a formação educativa através de uma aprendizagem significativa e um currículo adaptado por projetos. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 9, p. e820997969-e820997969, 2020.

D'AMBRÓSIO, Beatriz. Formação de Professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio. **Proposições**, v. 4, n. 1 (10), **1993**.

DAVID, Maria Manuela MS; MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **Formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Autêntica, 2013.

FONSECA, Maria das Dores Monteiro da; DIAS, Waldir Monteiro. Uma análise acerca da subutilização do lúdico na EMEIF da "parada miriti", na turma do 1º ano do município de são João de Pirabas/PA. 2017.

FREITAS, Ana Paula de et al. Zona de desenvolvimento proximal: a problematização do conceito através de um estudo de caso. 2001.

GRANDO, Regina Célia et al. O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula. 2000.

JUNIOR, Miguel Bury dos Santos. A ludicidade na perspectiva dos professores de ciências da rede municipal de ensino na cidade de Cruz das Almas-BA. 2018.

KISHIMOTO, Tizuko M. O Brincar e suas Teorias. SP: **Pioneira Educação**, 1990.

KISHIMOTO, Tizuko M. Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. **Cortez editora**, 2017.

MARQUES, Josiane Acácia de Oliveira. **O curso de especialização para o ensino de cegos do Instituto Caetano de Campos e o método de Decroly no ensino de matemática (1945-1966)**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 2021.

MATTOS, Robson Aldrin Lima**. Jogo e Matemática: Uma relação possível.** 2009.

MONTEIRO, Flávia Miriane. A utilização de jogos lúdico-didáticos no ensino de língua inglesa. 2013.

MOREIRA, Marco Antonio. Aprendizaje significativo crítico (Critical meaningful learning). **Indivisa. Boletín de estudios e investigación**, n. 6, p. 83-102, 2005.

MOTA, Paula Cristina Costa Leite de Moura. **Jogos no Ensino da Matemática**. 2009. Dissertação de Mestrado.

OLIVEIRA, Karine Bordin de. Estratégias lúdicas para o ensino de Ciências/Biologia: retratos do V Encontro Nacional de Ensino de Biologia (ENEBIO). 2017.

PEDREIRA, Roseane Ramos et al. Uma revisão bibliográfica sobre o lúdico com enfoque no ensino de ciências. 2018.

PEREIRA, Adriano da Nóbrega. O uso do lúdico na educação para o trânsito nos anos iniciais do ensino fundamental. 2021.

PEREIRA, Duarte Costa. **Nova Educação na Nova Ciência para a Nova Sociedade. Fundamentos de uma Pedagogia Científica Contemporânea. (Volume 1)**. Universidade do Porto, 2007.

PIAGET, Jean; BRAGA, Ivette. **Para onde vai a educação?**. J. Olympio, 1973.

RAMOS, Fábio Pestana; DE MORAIS, Marcus Vinícius. **Eles formaram o Brasil**. Editora Contexto, 2011.

ROSA, Tânia Maria Rodrigues da. Gamificação: uma prática para revitalizar a educação. 2018.

SANTANA, Flávio Santos de; TAFFAREL, Celi Nelza Zulke. A relação entre o Programa Mais Educação e o Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova: nexos e determinações de duas proposições liberais. (Dissertação) Universidade Federal da Bahia. Faculdade de Educação 2016. Disponível em: < https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/19360/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20PRONTA%20-%20FL%c3%81VIO%20%20%281%29.pdf>. Acesso em 30 de jul de 2021.

SANTANNA, Alexandre; NASCIMENTO, Paulo Roberto. A história do lúdico na educação The history of playful in education. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 6, n. 2, p. 19-36, 2011.

SANTOS, José Milton Canuto dos et al. **Educação matemática: a contribuição dos jogos matemáticos na prática do ensino e da aprendizagem da matemática no ensino médio**. 2012. Dissertação de Mestrado.

SANTOS, Josenilson Felizardo dos et al. Pintando o sete: matemática e artes nos anos iniciais do ensino fundamental. 2015.

SILVA, Aline Raquel da; SANTOS, Edyelle Ferreira dos; SILVA, Nailza Pereira da. O aprender através dos jogos nos anos iniciais do ensino fundamental I. 2016.

SILVA, Michele Flávia da. A importância da matemática no ensino fundamental. **Rev. Eficaz, Maringá-PR**, 2015.

SPINOLA, Luciene da Silva. Brincar é preciso na educação infantil. 2018.

TENÓRIO, Valdemir de Oliveira et al. O lúdico no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos nas séries iniciais do Ensino Fundamental no município de Humaitá/AM. 2010.

CAPÍTULO 13

ANÁLISE ESPECTRAL SINGULAR BASEADA NA FUNÇÃO DE HUBER

Data de aceite: 02/05/2022

Matheus Lima Cornejo
Estatístico. Mestrando em Quantitative Finance. Alma Mater Studiorum -Universidade de Bolonha
http://lattes.cnpq.br/3487975850580865

Fabio Alexander Fajardo Molinares
Professor do Departamento de Estatística-Universidade Federal do Espírito Santo. LECON - Laboratório de Estatística e Computação Natural, UFES
http://lattes.cnpq.br/7160790421499438

RESUMO: Este trabalho concentra-se no estudo de metodologias robustas para a análise espectral singular, cuja proposta é a decomposição, filtragem e reconstrução de séries temporais, sendo relevante o tratamento de eventos que podem causar efeitos significativos na dinâmica dos dados e, consequentemente, na estrutura de dependência dos mesmos. Exemplos comumente encontrados nas aplicações práticas são a influência de observações atípicas, quebras estruturais, volatilidade, entre outras. Tais eventos podem causar efeitos significativos na modelagem dos dados e influenciar significativamente as decisões baseadas nos modelos ajustados. A influência de observações atípicas causam uma influência significativa na estimação dos parâmetros e na previsão de dados futuros. Os resultados teóricos e empíricos apresentados na literatura incentivaram o estudo de técnicas robustas baseadas em estimadores tipo M para o tratamento das problemáticas causadas por eventos externos à natureza do conjunto de observações. O interesse neste estudo é verificar o desempenho de uma metodologia robusta usando M-estimadores em cenários com dados contaminados por dados atípicos de tipo aditivo. O estudo empírico realizado mostra o desempenho dos estimadores em situações práticas. Os resultados obtidos indicam uma superioridade da metodologia robusta em relação à clássica.

PALAVRAS-CHAVE: Dados atípicos; Decomposição singular; M-estimador; LTS-estimador; Análise espectral singular.

SINGULAR SPECTRAL ANALYSIS BASED ON THE HUBER FUNCTION

ABSTRACT: This work focuses on the study of robust methodologies for singular spectral analysis, whose proposal is the decomposition, filtering and reconstruction of time series. Moreover, it is relevant in the treatment of events that can cause significant effects on the dynamics of the data and, consequently, on the structure of their dependence. Examples commonly found in practical applications are the influence of outliers, structural breaks, volatility, among others. Such events can have significant consequences on data modeling and significantly influence decisions based on fitted models. The effect of outliers causes a significant impact on the estimation of parameters and on the prediction of future data. The theoretical and empirical results presented in the literature encouraged the study of robust techniques based on M-type estimators for the treatment of problems caused by events

external to the nature of the set of observations. The interest of this study is to verify the performance of a robust methodology using M-estimators in scenarios with data contaminated by atypical data of the additive type. The empirical study carried out shows the performance of the estimators in practical situations. The results obtained indicate a superiority of the robust methodology in relation to the classic one.
KEYWORDS: Atypical data; Singular decomposition; M-estimator; LITERS-estimator; Singular spectral analysis.

1 I INTRODUÇÃO

A análise espectral singular (*singular spectrum analysis* ou SSA, na sigla em inglês) é uma técnica não-paramétrica a partir da qual uma série temporal é decomposta na soma de componentes ortogonais e interpretáveis, as quais representam a tendência, o comportamento oscilatório (componentes periódicas ou quase-periódicas) e uma componente de ruído. Uma vez determinadas estas componentes, as mesmas são selecionadas para reconstruir uma aproximação da série sem ruído, podendo, em seguida, ser utilizadas para realizar previsão (GOLYANDINA & ZHIGLJAVSKY, 2013).

A SSA é uma ferramenta muito útil que pode ser utilizada para encontrar tendências de diferentes naturezas, para realizar alisamento ou suavização nos dados, para extrair componentes de sazonalidade, para extrair simultaneamente componentes cíclicas com pequenos e grandes períodos, para extrair periodicidades com amplitudes diferentes, para verificar a estrutura em séries temporais curtas, para detectar mudanças estruturais, para prever séries temporais univariadas ou multivariadas, entre outras.

A SSA foi desenvolvida para modelar séries temporais lineares ou não-lineares, estacionárias ou não-estacionárias, assim como conjuntos de dados pequenos com estrutura de dependência temporal e com muita variabilidade no processo de ruido Hassani (2007). Na atualidade, o método da SSA tem-se tornado popular em várias áreas do conhecimento como Medicina (DE ALBUQUERQUE PEREIRA & MACIEL 2001; SANEI & HASSANI 2015), Engenharia (CHAO & LOH 2014; LOH ET AL. 2013), Geologia (CHEN & SACCHI 2013), Economia e Finanças (HASSANI ET AL. 2009, 2013, LISI & MEDIO 1997, SILVA & HASSANI 2015). A superioridade do SSA comparada com outras técnicas de análise de séries temporais tem sido demonstrada empiricamente nos trabalhos de Mahmoudvand et al. (2013), Hassani (2007), Hassani & Thomakos (2010), entre outros.

A SSA se inicia pela incorporação dos dados em uma matriz, que é comumente chamada de matriz trajetória. Realiza-se, então, o processo de aproximação de matrizes com posto reduzido, isto é, realiza-se a redução do posto da matriz trajetória seguido do cálculo da média das antidiagonais. Entretanto, como a redução do posto é baseada na norma L_2 (também conhecida como norma de Frobenius), o SSA é sensível à presença de dados atípicos ou *outliers*. A presença de dados atípicos afeta todo o processo do SSA, desde a construção da matriz trajetória até o cálculo da média das antidiagonais.

Porém, o seu maior impacto ocorre no processo de aproximação de matrizes com posto reduzido. A existência de dados atípicos faz com que a magnitude dos autovalores cresça, consequentemente, aumentando o número de valores singulares e componentes principais, impactando na reconstrução e previsão da série temporal (HASSANI et al. 2014).

Para minimizar os efeitos causados pelos dados atípicos no conjunto de observações foram desenvolvidas metodologias robustas para a SSA baseadas em M-estimadores Chen & Sac- chi (2013). A metodologia proposta pelos autores sugere um processo de aproximação de matrizes com posto reduzido, utilizando-se das propriedades robustas das funções com M-estimadores. Além disso, faz-se o uso do método de *iteratively reweighed least-squares* (IRLS) para solucionar tal problemática. Entretanto, não foi proposta nenhuma reconstrução via estimação pontual robusta, e a reconstrução seguiu sendo realizada por meio do cálculo da média das antidiagonais, de acordo com a metodologia clássica da SSA básica. Yarmohammadi & Kalantari (2016) sugeriram a redução do posto da matriz trajetória baseada na norma L_1 e propuseram uma reconstrução via o cálculo da mediana das antidiagonais. Todavia, por falta de precisão teórica e matemática, seus resultados são insatisfatórios.

Visando propor técnicas que ofereçam maior eficiência nas aplicações empíricas, este estudo tem como objetivo propor uma metodologia robusta para a análise espectral singular baseada na aproximação robusta de matrizes com posto reduzido, utilizando um M-estimador com a função de Huber, e na reconstrução via estimação pontual de locação de Huber.

O restante deste documento é dividido em quatro seções. Na Seção 2 é apresentada a metodologia e a base teórica necessária para introduzir, na Seção 3, uma nova versão da SSA. Na Seção 4, investiga-se a performance da metodologia básica da SSA e da nova versão sugerida atravéz de simulações e aplicação à dados reais. Enquanto, na Seção 5, são apresentadas as observações e conclusões adquiridas ao longo do estudo.

2 | METODOLOGIA

O algoritmo para SSA será introduzido de forma concisa neste documento Golyandina & Zhigljavsky (2013).

2.1 Análise Espectral Singular

Seja $\mathbb{X} = (x_1, \ldots, x_N)$ uma série temporal com valores no conjunto dos números reais e de tamanho N, onde $N > 2$ e $x_i \neq 0$, para pelo menos um $i = 1, \ldots, N$. Dado o comprimento da janela L $(2 \leq L \leq N - 1)$, pode-se construir vetores $X_i = (x_i, \ldots, x_{i+L-1})^\mathrm{T}$, $i = 1, \ldots, K$, onde $K = N - L + 1$, que formam a matriz trajetória $\mathbf{X}$, dada por:

$$\mathbf{X} = [X_1, \ldots, X_K] = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_K \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \cdots & x_N \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

onde os vetores X_i são as colunas da matriz **X**. Nota-se que a matriz **X** possui elementos iguais em suas antidiagonais, isto é, **X** é uma matriz Hankel. As colunas de **X** podem ser consideradas como vetores no espaço $\mathbb{R}^L$. O processo de aproximação de matrizes com posto reduzido da matriz $\mathbf{XX}^T$ (que é equivalente ao processo da descomposição do valor singular da matriz **X**). nos retorna L pares de autovalores e autovetores. Onde uma combinação ao particular de r destes autovetores determina um subespaço $\mathcal{L}_r$ em $\mathbb{R}^L$, $r < L$. Portanto, os vetores L dimensionais $\{X_1; : : : ;X_k\}$ são projetados no subespaço $\mathcal{L}_r$ e, em seguida, é retirada a média das antidiagonais (Hankelização) nos fornencendo uma matriz de Hankel $\tilde{X}$. A série temporal $(\tilde{x}_1; : : : ; \tilde{x}_N)$, que possui correspondência biunívoca com a matriz $\tilde{X}$, nos dá uma aproximação da série $\mathbb{X}$.

2.2 Aproximação de Matrizes com Posto Reduzido na Norma de Frobenius

No método básico de análise espectral singular, a aproximação de matrizes com posto reduzido r se basea na norma de Frobenius. O objetivo deste processo é encontrar uma matriz $\hat{X}^{(r)}$ tal que:

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(r)} = \arg\min_{\mathbf{t}} ||\mathbf{X} - \mathbf{t}||_F, \qquad (2)$$

onde $||\mathbf{X} - \mathbf{t}||_F = {}^{m}_{i=1} \Sigma^{n}_{j=1} (x_{ij} - t_{ij})^2$. O problema (2) acima tem mínimo local único, que é global (Srebro & Jaakkola 2003). A solução pode ser obtida de maneira analítica, e é dada pela decomposição do valor singular (SVD). No entanto, a função de perda quadrática faz com que essa solução seja sensível a ruídos não Gaussianos (Cabral et al. 2013). Tal desvantagem, limita a utilização e aplicabilidade do método SSA em situações onde os dados estão contaminados por observações atípicas.

2.3 Hankelização

O cálculo da médias das antidiagonais na SSA é também conhecido como Hankelização. Por conveniência, este processo será representado com a ajuda do operador Hankel, H. Este operador funciona em uma matriz arbritária $\mathbf{Y}_{L\times K} = (y_{ij})$ da seguinte maneira: para $A_s = \{(l, k) : l + k = s, 1 \leq l \leq L, 1 \leq k \leq K\}$ e $i + j = s$, o elemento $\tilde{y}_{ij}$ da matriz $H\mathbf{Y}$ é:

$$\tilde{y}_{ij} = \sum_{(l,k)\in A_s} \frac{y_{lk}}{|A_s|}, \qquad (3)$$

onde $|A_s|$ denota o número de elementos no conjunto A_s. A Hankelização é um processo de otimização, no sentido de que $H\mathbf{Y}$ é a matriz mais próxima de **Y** com respeito a norma L_2, também chamada de norma de Frobenius.

2.4 Análise Espectral Singular e Observações Atípicas

Como previamente mencionado, a presença de dados atípicos afeta a SSA. Mostra-se, então, nesta seção os principais efeitos causados em diferentes partes da SSA (Hassani et al. 2014).

2.4.1 Matriz Trajetória

Sabe-se que matriz trajetória X é uma matriz Hankel, ou seja, os elementos ao longo de suas antidiagonais são iguais. Logo, a matriz X possui certas características(Mahmoudvand & Zokaei 2011). Sendo uma delas, por exemplo, que a *j*-ésima observação ao em uma série temporal se repete $w_j^{L;N} = \min\{ j; L;N - j + 1\}$ vezes na matriz trajetória X. É importante notar que $w_j^{L;N}$ tem as seguintes propriedades.

1. $w_j^{L;N}$ é uma função coˆncava em L para todo j, onde $j \in \{1, \ldots, N\}$,
2. $w_j^{L;N}$ é uma função coˆncava em j para todo L, onde $L \in \{2, \ldots, N-1\}$,
3. $w_j^{L;N}$ é uma função simetrica em $(N+1)/2$ com respeito à j e L.

Portanto, um dado atípico localizado na *j*–ésima observação em uma série temporal se repetirá $w_j^{L;N}$ vezes na matriz trajetória. Consequentemente, é significativo citar que o posto da matriz trajetória também é afetado, isto é, dados atípicos aumentam o posto da matriz trajetória (Hassani et al. 2014).

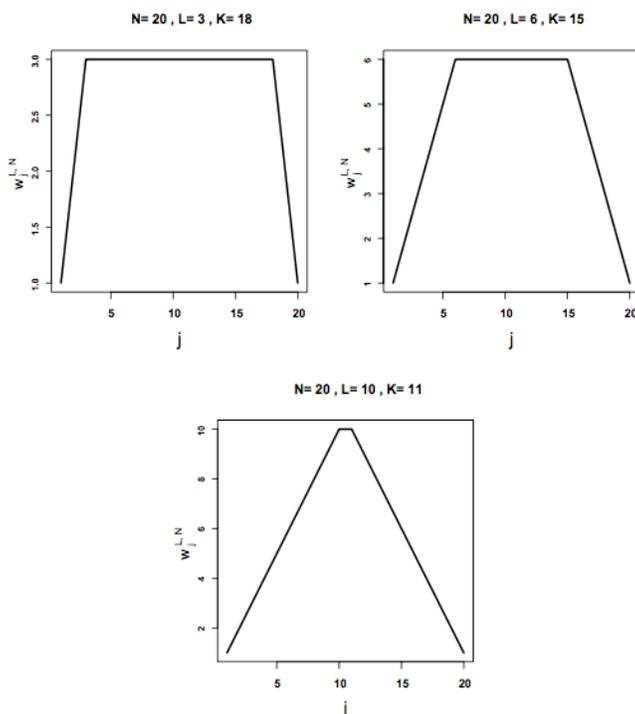



Figura 1 Forma de $w_j^{L,N}$ em função de L para $N = 20$.

2.4.2 Autovalores

A decomposição do valor singular (SVD) fornece uma coleção de L pares de autovalores e autovetores. Verifica-se o efeito da presença de dados atípicos, somando os L autovalores obtidos na SVD da matriz $\mathbf{XX}^T$. Portanto, para um valor L fixo, o traço de $\mathbf{XX}^T$ é dado por:

$$T_{\mathbf{X}}^{L,N} = \text{tr}(\mathbf{XX}^T) = \sum_{j=1}^{L} \lambda_j = \sum_{j=1}^{N} w_j^{L,N} x_j^2, \tag{4}$$

para prova da equação, ver Mahmoudvand & Zokaei (2011).

Assim seja $\mathbf{X}^{(j)}$ a matriz trajetória da série $\mathbb{X}$ após ser contaminada no j-ésimo elemento, isto é, $\mathbb{X}^{(j)} = (x_1, \ldots, \delta x_j, \ldots, x_N)$. Tem-se, então, que:

$$T_{\mathbf{X}^{(j)}}^{L,N} = T_{\mathbf{X}}^{L,N} + (\delta^2 - 1) w_j^{L,N} x_j^2, \tag{5}$$

onde δ é intensidade do dado atípico. É fácil ver que $w_j^{L,N}$ obtém valor máximo quando $j = L =$ mediana $\{1, \ldots, N\}$, indicando que as observações do meio quando contaminadas afetam com maior intensidade a SSA.

2.5 Aproximação Robusta de Matrizes com Posto Reduzido

Para reduzir os efeitos causados pelos dados atípicos nas observações Chen & Sacchi (2013) suge- rem encontrar a matriz $\hat{\mathbf{X}}^{(r)}$ tal que:

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(r)} = \arg\min_{\mathbf{t}} ||\mathbf{X} - \mathbf{t}||_\rho, \tag{6}$$

onde $||\mathbf{X} - \mathbf{t}||_\rho = \Sigma^m_{i=1} \Sigma^n_{j=1} \rho(x_{ij} - t_{ij})$, e ρ é uma função simétrica, convexa e $\rho(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$. Neste caso, em geral, não há expressão analítica para a solução deste problema.

2.6 Hankelização Robusta

É proposto em Kalantari et al. (2016) a ideia de Hankelização robusta. Porém, o mesmo, somente se preocupa em propor a Hankelização para a norma L_1. Aqui, sugere-se a utilização de qualquer função robusta que possua estimação pontual no procedimento de Hankelização.

Teorema 1 (Hankelização Robusta). *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz de dimensões* $L \times K$*, e* $s = i + j$ $(2 \leq s \leq L + K)$*. Então o elemento* $\tilde{a}_{ij}$ *da matriz* $H[\mathbf{A}]$ *com respeito a uma métrica robusta é*

$$\tilde{a}_{ij} = \delta(a_{lk}), \qquad (l, k) \in A_s \tag{7}$$

onde δ *é a estimação pontual robusta e* $A_s = \{(l, k) : l + k = s, 1 \leq l \leq L, 1 \leq k \leq K\}$.

Prova: Por definição, a matriz Hankel $\mathbf{C} = H[\mathbf{A}]$ com elementos c_{ij} satisfaz as condições $c_{ij} = f_s$, para $i + j = s$ e para um número f_s qualquer. Assim, tem-se:

$$||\mathbf{A}-\mathcal{H}[\mathbf{A}]||_\delta = ||\mathbf{A}-\mathbf{C}||_\delta = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{K}\delta(a_{ij}-c_{ij}) = \sum_{s=2}^{L+K}\sum_{i+j=s}\delta(a_{ij}-f_s). \quad (8)$$

É evidente observar que o número f_s que minimiza esta relação é uma estimação pontual robusta dos elementos de A_s. Portanto, a Hankelização robusta corresponde em calcular as estimações pontuais robustas das antidiagonais de uma matriz.

3 I ANÁLISE ESPECTRAL SINGULAR BASEADA NA FUNÇÃO DE HUBER

Utilizando a teoria apresentada na seção anterior, faz-se aqui uma rápida introdução à análise espectral singular baseada na função de Huber; destacando as principais mudanças e diferenças em relação á SSA básica e fazendo uma breve introdução ao algoritmo de otimização utilizado.

3.1 Aproximação Huber de Matrizes com Posto Reduzido

Seja ρ a função de Huber dada por:

$$\rho_H(s) = \frac{s^2}{2H} I_{(|s|\leq H)} + (|s| - 0.5H) I_{(|s|>H)}, \quad (9)$$

assim, na aproximação Huber de matrizes com posto reduzido, deseja-se encontrar a matriz $\hat{\mathbf{X}}^{(r)}$ que minimize (6).

Fazendo uso do formato multiplicativo, pode-se reescrever como:

$$\arg\min_{\mathbf{U},\mathbf{V}} ||\mathbf{X}-\mathbf{U}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}||_\rho. \quad (10)$$

A Equação (10), pode ser vista como um problema de regressão bilinear com variáveis **U** e **V** desconhecidas e pode ser resolvido pelo método de regressão robusta alternada Chen et al. (2008). Para encontrar os valores robustos que minimizem (10), faz-se uso do algoritmo *Fast and Robust Alternating Regression* Feng & He (2017), descrito na próxima subseção.

3.2 Fast and Robust Alternating Regression

3.2.1 Algoritmo

Abaixo, descreve-se brevemente o algoritmo.

Passo 0: Escalação Robusta. A fim de garantir estabilidade númerica e equivalência escalar, realiza-se a escalação robusta para a *j*-ésima coluna. Tal procedimento é realizado da seguinte forma

$$x_{ij} \leftarrow \frac{x_{ij}}{\mathrm{MAD}_i(x_{ij})},$$

onde $\mathrm{MAD}_i(x_{ij})$ é o desvio absoluto da médio *j*-ésima coluna. Este procedimento não

altera o posto da matriz. Caso um dos $\text{MAD}_i(x_{ij})$ seja iqual a zero, pula-se este passo.

Passo 1: Valores Iniciais. Gere, a partir de uma distribuição uniforme (0, 1), um valor inicial para $\mathbf{U}_0$. Contudo, outros valores iniciais podem ser utilizados.

Passo 2: Teste de Estabilidade. M-estimadores com perdas monótomas são robustos contra valores atípicos na variável resposta; porém, essa robustez não é verificada na presença de valores atípicos nas variáveis regressoras. Para isso, o teste de estabilidade usa LTS-estimadores com o intuito de aumentar a rosbutez contra pontos de alavanca.

Assim dado $\mathbf{U}_0$, realiza-se uma regressão das colunas de **X** em $\mathbf{U}_0$ a fim de encontrar ambos M e LTS estimadores; denotados $\mathbf{V}^M_0$ e $\mathbf{V}^{LTS}_0$, respectivamente. Depois, realiza-se o teste de erro relativo para saber se há diferença significativa entre os elementos de $\mathbf{V}^M_0$ e $\mathbf{V}^{LTS}_0$. Caso sejam diferentes significativamente, escolhe-se $\mathbf{V}^{LTS}_0$ como $\mathbf{V}_0$, do contrário escolhe-se $\mathbf{V}^M$. Com $\mathbf{V}_0$ fixado, computa-se o M e LTS estimadores para a regressão das linhas de **X** em $\mathbf{V}_0$, e seguindo o mesmo raciocínio anterior seleciona-se $\mathbf{U}_1$, e assim em diante.

O teste de estabilidade continua até que ambos ($\mathbf{U}^M_m$, $\mathbf{U}^{LTS}_m$) e ($\mathbf{V}^M_m$, $\mathbf{V}^{LTS}_m$) não apresentem mais diferenças significativas entre seus elementos ou até atingir um número máximo de iterações.

Passo 3: Regressão Huber Alternada. Fixe $\mathbf{U}_m0$, e solucione:

$$v_j = \arg\min \sum_{i=1}^{m} \rho(x_{ij} - u_i' v_j), j = 1, \ldots, n \tag{11}$$

para obter $\mathbf{V}_{m0}$. Padronizam-se as colunas de $\mathbf{V}_{m0}$ de tal forma que $\mathbf{V'V} = \mathbf{I}_r$. Depois, trate $\mathbf{V}_{m0}$ como fixo, e solucione:

$$u_i = \arg\min \sum_{j=1}^{n} \rho(x_{ij} - v_j' u_i), i = 1, \ldots, m \tag{12}$$

para obter $\mathbf{U}_{m0+1}$. Continua-se o processo até que se satisfaça as seguintes condições:

1. A diferença entre todos os elementos das matrizes $\mathbf{U}_m$ e $\mathbf{U}_{m+1}$, $\mathbf{V}_m$ e $\mathbf{V}_{m+1}$ sejam menores que um valor pequeno ϵ_1;
2. A mudança na função objetivo $\Sigma^m_{i=1} \Sigma^n_{j=1} \rho(x_{ij} - u_i v_j')$ não ultrapasse um valor pequeno ϵ_2.

Passo 4: Solução. Uma vez que a iteração no passo 3 acabe, os valores finais $\mathbf{U}_m$ e $\mathbf{V}_m$ são considerados como soluções para o problema.

Assim, a matriz trajetória pode ser escrita como

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_r, \tag{13}$$

onde $\mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

3.2.2 Overfit e Underfit

Dado r, o algoritmo acima, encontra as matrizes **U** e **V** de posto r que minimizam (10). Porém, como na prática não se conhece r, casos de *overfitting* e *underfitting* podem ocorrer. Chen et al. (2008) detalham as consequencias de ambos e conclui que é mais seguro ajustar regressões robus- tas alternadas em postos de menores magnitudes, uma vez que *overfitting* faz com que o algoritmo tente interpretar as informações erroˆneas introduzidas pelos dados atípicos. Gerando, assim, pro- blemas de convergência e robustez.

Além disso, Chen et al. (2008) ainda sugerem duas soluções para contornar tal problema. Sendo a primeira: o aumento gradativo de r, aliado à análise dos valores da função de custo para decidir o melhor r. E a segunda: usar a regressão L_1 ponderada de Croux et al. (2003), com pesos baseados no estimador da matriz de covariâncias de determinante mínimo de Rousseeuw (1984), porém deixa claro que o último possui custo computacional elevado.

3.3 Hankelização Huber

A partir do Teorema 1, pode-se utilizar a estimação pontual de locação da função de Huber nas antidiagonais como método de reconstrução. De agora em diante, esse procedimento será denomi- dado de Hankelização Huber.

4 I RESULTADOS EMPÍRICOS

Avalia-se, nesta seção o desempenho do Huber-SSA em séries temporais simuladas e séries tem- porais reais, ambas contaminadas com dados atípicos. Para isso, adotou-se as medidas de erro quadrático médio (RMSE)

$$\text{RMSE} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i - x_i)^2}{n}\right]^{1/2},$$

onde $\hat{x}_i$ e x_i representam respectivamente os valores ajustados e observados no i-ésimo tempo. Tal critério de avaliação é extremamente conhecido e usado frequentemente em análise de séries temporais. Além disso, compara-se os resultados obtidos, com os do SSA básico.

Nos exemplos, escolheu-se a janela de comprimento L e posto r de acordo com os dados, porém seguindo as conclusões obtidas em Atikur Rahman Khan & Poskitt (2013), Hassani & Mahmoudvand (2013), Mahmoudvand et al. (2013), Feng & He (2017), Chen et al. (2008).

4.1 Série simulada

Exemplo 1: Gerou-se uma série AR(1) com ϕ = 0.3 contendo 72 observações, e adicinou-se à ela as seguintes componentes de senos e cossenos:

$$S_1(t) = 2\cos(12t\pi/n) + 3\sin(12t\pi/n),$$
$$S_2(t) = 4\cos(20t\pi/n) + 5\sin(20t\pi/n).$$

Além disso, adicionaram-se aleatoriamente três observações atípicas de tipo aditivo nas posições 13, 31 e 66. A Figura 2 mostra o gráfico da série temporal antes e depois da contaminação, onde denominou-se *free* como a série sem contaminação e *cont* a série depois de ter sido contaminada. A fim de obter a melhor performance, escolheu-se L igual a 24 e r igual a 10 como recomendado por Atikur Rahman Khan & Poskitt (2013) e Chen et al. (2008), respectivamente.

Pode-se observar na Figura 3 as dez primeiras componentes reconstruidas para a série *cont* após a aplicação da SSA básica; enquanto na Figura 4, encontram-se as dez primeiras componentes reconstruidas para a SSA robusta. Fica evidente a capacidade de minimizar ruídos gereados pela presença de *outliers* no conjunto de dados. Com excessão das componentes 1, 2 e 3, que são comumente conhecidas como componentes harmonicas, todos apresentam amplitudes inferiores.

Comparou-se as séries reconstruídas por ambos os métodos com a série original livre de contaminação por dados atípicos, *free*. Enquanto a série reconstruída pela SSA básica obteve RMSE igual à 1.09, a série reconstruída pela SSA robusta obteve .90. Uma melhora de aproxima- damente 20%.

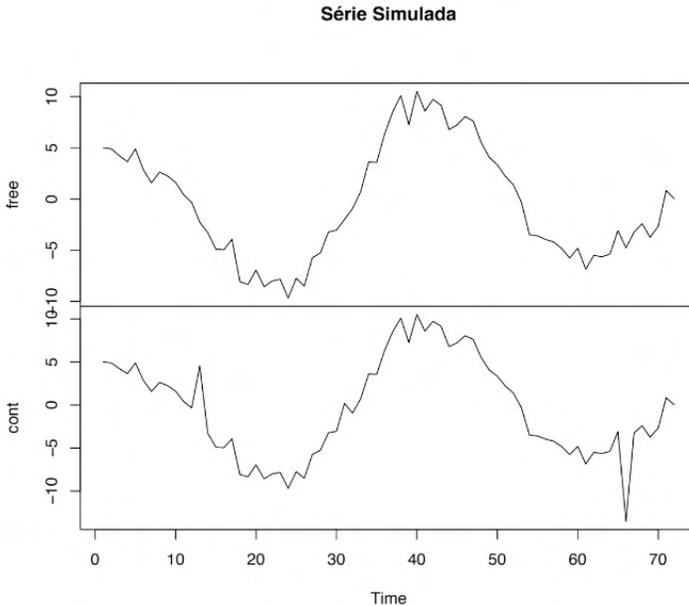



Figura 2 Série AR(1) com $\phi = 0.3$ simulada sem e com contaminação por *outliers*.

Figura 3 Dez primeiras omponentes principais da série AR(1) com ϕ = 0.3 simulada com contaminação por *outliers* para a SSA básica.

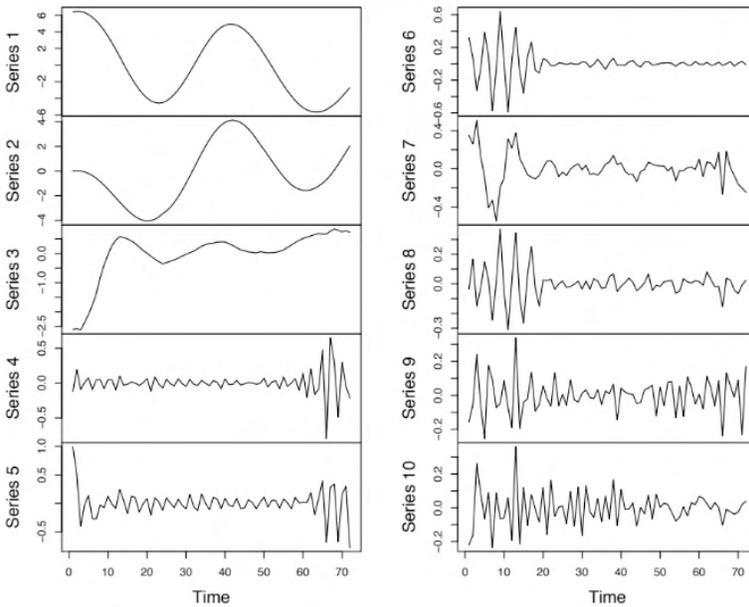



Figura 4 Dez primeiras componentes principais da série AR(1) com ϕ = 0.3 simulada com contaminação por *outliers* para a SSA robusta.

Exemplo 2: Simulou-se, neste exemplo, uma série AR(1) com ϕ = 0.9, também contendo 72 observações, e adicinou-se à ela a seguinte componente de seno e cosseno:

$$S_1(t) = 2\cos(12t\pi/n) + 3\sin(12t\pi/n).$$

Foi-se adicionado aleatoriamente um *outlier* na posição 62. Encontram-se na Figura 5, a série original, denominada como *free1*, e a contaminada denominada como *cont1*. Optou-se por escolher L igual a 36 e r igual 10, como sugerido em Mahmoudvand et al. (2013) e Feng & He (2017).

Observa-se nas Figuras 6 e 7 as dez primeiras componentes reconstruidas utilizando a metodo- logia robusta e a básica, respectivamente. Repare que houve uma troca entre as componentes 6 e 5. É possível notar uma suavização seguida de uma atenuação nas componentes 8, 9 e 10.

Calculou-se o RMSE entre as séries reconstruídas por ambas metodologias e a série *free1*. E verificou-se que a metodologia robusta ofereceu uma melhora de 15%.

4.2 Série real

O conjunto de dados do rio Nilo é uma série temporal bem conhecida, e já foi extensamente análisada. Os dados são examinados com detalhe em Beran (1994), e consiste dos níveis mínimos anuais da água do rio Nilo em metros, entre 622 D.C. à 1281 D.C.

Figura 5 Série AR(1) com $\phi = 0.9$ simulada sem e com contaminação por *outliers*.

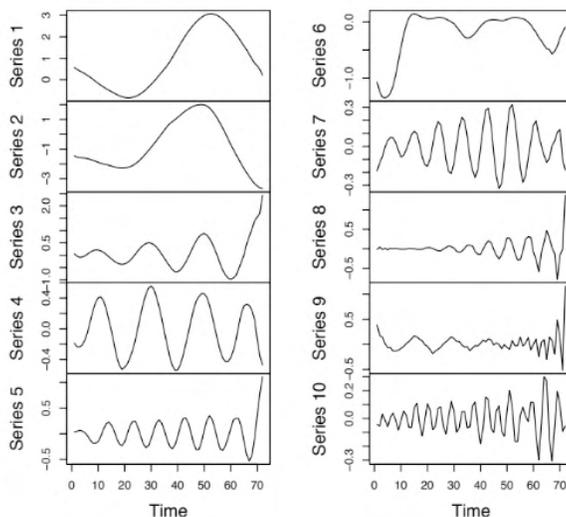



Figura 6 Dez primeiras omponentes principais da série AR(1) com $\phi = 0.9$ simulada com contaminação por *outliers* para a SSA robusta.

Várias discusões já ocorreram sobre a existência ou não de dados atípicos neste conjunto de dados. Entretanto, em Chareka et al. (2006) concluiu-se que as observações nos anos 646 D.C., 809 D.C. e 876 D.C. são atípicas do tipo aditivo.

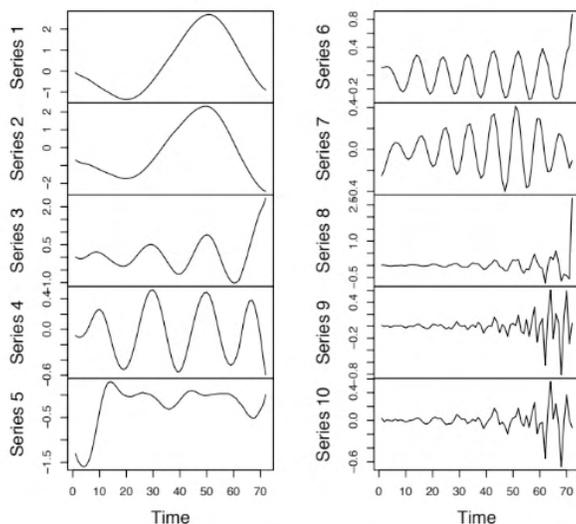



Figura 7 Dez primeiras omponentes principais da série AR(1) com $\phi = 0.9$ simulada com contaminação por *outliers* para a SSA básica.

Aplicou-se, então, à esses dados a metodologia da análise espectral singular robusta introduzida n Seção 3. Para isso, escolheu-se uma comprimento de janela L igual a 18 e r igual 8, com o intuito de evitar *overfitting* na aproximação Huber de matrizes com posto reduzido.

Encontram-se nas Figuras 9 e 10, as oito primeiras componentes principais da série recons- truida de nível mínimo do rio Nilo utlizando a SSA robusta e a SSA básica, respectivamente. Note que para as quatro primeiras componentes ambos os métodos apresentam resultados semelhantes, porém pode- se observar que a diferença entre os métodos se acentua a partir da quinta compo- nente, destacando-se as componentes 6 e 8. Assim, fica evidente de que a SSA robusta se mostra mais vantajosa em relação ao clássico na atenuação de ruídos em situações onde o conjunto de dados está contaminado por *outliers*.

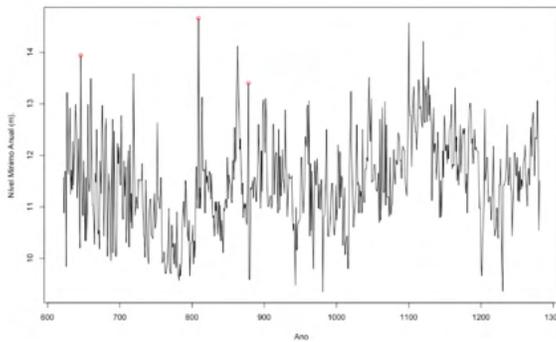



Figura 8 Série de nível mínimo do rio Nilo de 622 D.C. à 1281 D.C., com os dados atípicos identificados.

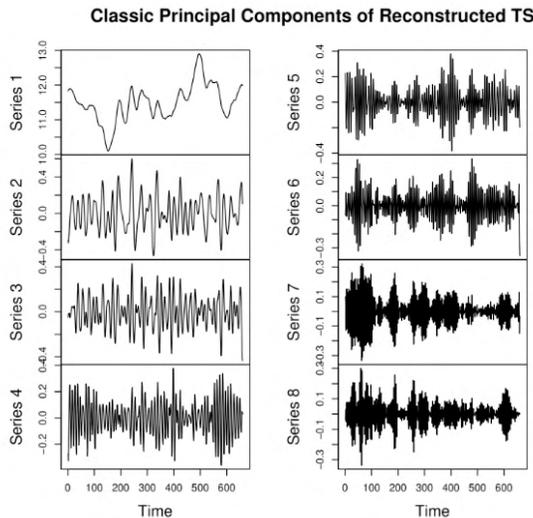



Figura 9 Oito primeiras componentes principais da série reconstruida de nível mínimo do rio Nilo para a SSA robusta.

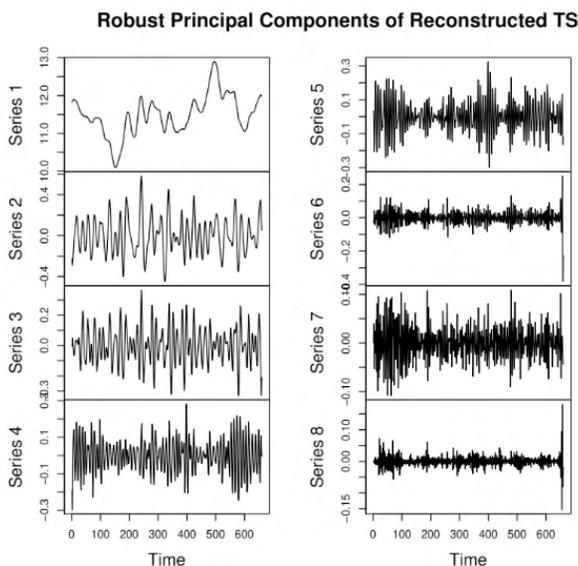



Figura 10 Oito primeiras componentes principais da série reconstruida de nível mínimo do rio Nilo para a SSA básica

5 | CONCLUSÃO

Conclui-se que esta nova metodologia de SSA robusta apresenta ser adequada para a atenuação de ruídos gerados pela a presença de observações atípicas no conjunto de dados. Mostrando ser de extrema relevância para o tratamento de séries temporais com *outliers* de tipo aditivo.

Como limitação do estudo, destaca-se o custo computacional elevado para matrizes com maior números de linhas e colunas. Além disso, é importante mencionar a influência que o comprimento de janela L possui no processo. Em algumas ocasiões, o tamanho do L se mostrou fundamental para que a SSA clássica superasse a metodologia robusta.

Sugere-se como continuação a este trabalho, um estudo detalhado da influência que compri- mento da janela L exerce na SSA quando aplicada em séries contaminadas. Também recomenda-se um estudo sobre a performance da SSA robusta para a previsão de observações futuras.

REFERÊNCIAS

Atikur Rahman Khan, M. & Poskitt, D. (2013), ‘A note on window length selection in singular spectrum analysis’, *Australian & New Zealand Journal of Statistics* **55**(2), 87–108.

Beran, J. (1994), *Statistics for long-memory processes*, Vol. 61, CRC press.

Cabral, R., De la Torre, F., Costeira, J. & Bernardino, A. (2013), Unifying nuclear norm and bilinear factorization approaches for low-rank matrix decomposition, *in* ‘Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision’, pp. 2488–2495.

Chao, S.-H. & Loh, C.-H. (2014), ‘Application of singular spectrum analysis to structural monitoring and damage diagnosis of bridges’, *Structure and Infrastructure Engineering* **10**(6), 708– 727.

Chareka, P., Matarise, F. & Turner, R. (2006), ‘A test for additive outliers applicable to long- memory time series’, *Journal of Economic Dynamics and Control* **30**(4), 595–621.

Chen, C., He, X. & Wei, Y. (2008), ‘Lower rank approximation of matrices based on fast and robust alternating regression’, *Journal of Computational and Graphical Statistics* **17**(1), 186–200.

Chen, K. & Sacchi, M. D. (2013), Robust singular spectrum analysis for erratic noise attenuation, Technical report, CSPG/CSEG/CWLS GeoConvention 2013, Integration: Geoscience Enginee- ring Partnership, 6-12 May 2013, Calgary, AB, Canada.

Croux, C., Filzmoser, P., Pison, G. & Rousseeuw, P. J. (2003), ‘Fitting multiplicative models by robust alternating regressions’, *Statistics and Computing* **13**(1), 23–36.

de Albuquerque Pereira, W. C. & Maciel, C. D. (2001), ‘Performance of ultrasound echo decompo- sition using singular spectrum analysis’, *Ultrasound in medicine & biology* **27**(9), 1231–1238.

Feng, X. & He, X. (2017), ‘Robust low-rank data matrix approximations’, *Science China Mathe- matics* **60**(2), 189–200.

Golyandina, N. & Zhigljavsky, A. (2013), *Singular Spectrum Analysis for time series*, Springer Science & Business Media.

Hassani, H. (2007), ‘Singular spectrum analysis: Methodology and comparison’, *Journal of Data Science* **5**, 239–257

Hassani, H., Heravi, S. & Zhigljavsky, A. (2009), ‘Forecasting european industrial production with singular spectrum analysis’, *International journal of forecasting* **25**(1), 103–118.

Hassani, H. & Mahmoudvand, R. (2013), ‘Multivariate singular spectrum analysis: A general view and new vector forecasting approach’, *International Journal of Energy and Statistics* **1**(01), 55– 83.

Hassani, H., Mahmoudvand, R., Omer, H. N. & Silva, E. S. (2014), ‘A preliminary investiga- tion into the effect of outlier (s) on singular spectrum analysis’, *Fluctuation and Noise Letters* **13**(04), 1450029.

Hassani, H., Soofi, A. S. & Zhigljavsky, A. (2013), ‘Predicting inflation dynamics with singu- lar spectrum analysis’, *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)* **176**(3), 743–760.

Hassani, H. & Thomakos, D. (2010), ‘A review on singular spectrum analysis for economic and financial time series’, *Statistics and its Interface* **3**(3), 377–397.

Kalantari, M., Yarmohammadi, M. & Hassani, H. (2016), ‘Singular spectrum analysis based on l 1-norm’, *Fluctuation and Noise Letters* **15**(01), 1650009.

Lisi, F. & Medio, A. (1997), ‘Is a random walk the best exchange rate predictor?’, *International Journal of Forecasting* **13**(2), 255–267.

Loh, C.-H., Li, J.-H. & Chao, S.-H. (2013), ‘Application of singular spectrum analysis to identify the degrading structure using deteriorating distributed element model’, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* **42**(5), 743–761.

Mahmoudvand, R., Najari, N. & Zokaei, M. (2013), ‘On the optimal parameters for reconstruction and forecasting in singular spectrum analysis’, *Communications in Statistics-Simulation and Computation* **42**(4), 860–870.

Mahmoudvand, R. & Zokaei, M. (2011), ‘On the singular values of the hankel matrix with appli- cation in singular spectrum analysis’, *Chilean Journal of Statistics* **3**(1), 43–56.

Rousseeuw, P. (1984), ‘Least median of squares regression’, *Journal of the American Statistical Association* **79**, 871–880.

Sanei, S. & Hassani, H. (2015), *Singular spectrum analysis of biomedical signals*, CRC Press.

Silva, E. S. & Hassani, H. (2015), ‘On the use of singular spectrum analysis for forecasting us trade before, during and after the 2008 recession’, *International Economics* **141**, 34–49.

Srebro, N. & Jaakkola, T. (2003), ‘Weighted low-rank approximations, paper presented at 20th international conference on machine learning, assoc. for the adv. of art’, *Intell., Washington, DC*.

Yarmohammadi, M. & Kalantari, M. (2016), Robust singular spectrum analysis, *in* ‘International Conference on Robust Statistics’, p. 1.

CAPÍTULO 14

PANORAMA DAS PUBLICAÇÕES SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO BANCO DE DISSERTAÇÕES E TESES DA CAPES NA ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Data de aceite: 02/05/2022

Creomar Moreira da Cruz
Instituto Federal de Goiás – Campos Goiânia, IFG

Ana Cristina Gomes de Jesus
Instituto Federal de Goiás – Campos Goiânia, IFG

Nilton Cezar Ferreira
Instituto Federal de Goiás – Campos Goiânia, IFG

RESUMO: Este artigo é um recorte da pesquisa de TCC com o título: Análise das publicações sobre a resolução de problemas no banco de dissertações e teses da capes na área de educação matemática, apresentada em maio de 2020 ao curso de Licenciatura em Matemática do IFGOIÁS, câmpus Goiânia. Esse trabalho emerge da ramificação do projeto de pesquisa: O ensino-aprendizagem de matemática sob a ótica da resolução de problemas, pensamento algébrico e semiótico no contexto da formação de professores de matemática. A resolução de problemas no ensino de matemática tem sido um campo de pesquisa de destaque que visa compreender e relacionar os processos envolvidos na solução de problemas com o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e competências de resolução de problemas pelos alunos.

PALAVRAS-CHAVE: Resolução de problemas, tese da capes, matemática.

ABSTRACT: This article is an excerpt from the TCC research entitled: Analysis of publications on problem solving in the capes dissertation and theses bank in the area of mathematics education, presented in May 2020 to the Mathematics Degree course at IFGOIÁS, campus goiânia. This work emerges from the branch of the research project: Mathematics teaching and learning from the perspective of problem solving, algebraic and semiotic thinking in the context of mathematics teacher education. Problem solving in mathematics teaching has been a prominent research field that aims to understand and relate the processes involved in problem solving with the development of mathematical knowledge and problem-solving skills by students.

KEYWORDS: Problem solving.

1 I INTRODUÇÃO

Este artigo é um recorte da pesquisa de TCC com o título: Análise das publicações sobre a resolução de problemas no banco de dissertações e teses da capes na área de educação matemática, apresentada em maio de 2020 ao curso de Licenciatura em Matemática do IFGOIÁS, câmpus Goiânia. Esse trabalho emerge da ramificação do projeto de pesquisa: O ensino-aprendizagem de matemática sob a ótica da resolução de problemas, pensamento algébrico e semiótico no contexto da formação de professores de matemática. A resolução de problemas no ensino de matemática tem sido

um campo de pesquisa de destaque que visa compreender e relacionar os processos envolvidos na solução de problemas com o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e competências de resolução de problemas pelos alunos.

Evan e Lappin (2014, p. 79) destacam:

> Os primeiros ensinamentos matemáticos de solução de problemas se concentraram em problemas passíveis de soluções pelas heurísticas do tipo desenhe um diagrama, examine casos ou analogias especiais, especialize-se, generalize e assim por diante. Ao longo dos anos, os métodos de ensinamento evoluíram a ponto de se concentrarem menos em heurísticas em si e mais em apresentar aos alunos idéias fundamentais: a importância do raciocínio e da prova matemática, por exemplo, e de investigações matemáticas sustentadas (onde meus problemas serviam como ponto de partida para explorações sérias, em vez de tarefas a serem concluídas)

Percebemos que ao longo da história que o campo de estudo sofreu modificações e mais adeptos. O termo resolução de problemas refere-se a tarefas matemáticas que têm o potencial de fornecer desafios intelectuais para aprimorar a compreensão matemática e o desenvolvimento dos alunos. Este campo de pesquisa inclui, por exemplo, estudos de Freitas (2014), Gontijo (2015), Fontana (2016), Marques (2017), Lima (2018), dentre outros.

A coleta de dados resultou em 60 trabalhos entre dissertações e teses, os quais possibilitou expor algumas informações relevantes tais como: quantidade de publicações por ano, o total de publicações de instituições estaduais e federais, a quantidade de publicações por regiões e tipos de trabalho (dissertações e teses), e também os temas que mais se pesquisa, o que contribuiu para uma reflexão ampla sobre o que está sendo publicado.

2 I OBJETIVO

O objetivo deste estudo foi traçar um panorama das publicações sobre a temática no banco de dissertações e teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), entre os anos de 2014 a 2018 na área de Educação Matemática, versando sobre a resolução de problemas. Justifica-se a escolha da temática, tendo vista que a resolução de problemas no ensino de matemática é um grande campo de estudo e pesquisa e uma abordagem de ensino e aprendizagem que busca utilizar problemas, perguntas ou tarefas que são intelectualmente desafiadoras e convidam o pensamento matemático por meio do conteúdo e dos processos matemáticos aos alunos.

3 I METODOLOGIA

A pesquisa em tela foi qualiquantitativa, sendo uma pesquisa documental, tendo como método o Estado da Arte, com a coleta de dissertações e teses, disponibilizadas na base de dados da CAPES, no período de 05 anos (2014 a 2018), que estivessem disponíveis na língua portuguesa e tratassem à temática, usou-se como filtro para a escolha palavras

chaves e que abordassem a temática. Para análise dos dados coletados usou-se Análise de Conteúdo na perspectiva de Bardin(2011).

4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na coleta de dado foram levantadas, 60 publicações, distribuídos entre o período informado, primeiro foi feito a organização do material coletado, o que mostrou quantos trabalhos que foram apresentados em cada ano, nos levando a refletir sobre, por exemplo, em média quantos trabalhos científicos vêm sendo apresentados, publicados na CAPES por ano, levando em consideração o tema que envolve a resolução de problemas. Segue alguns dados.

Ano	Quantidade de publicações
2014	18
2015	11
2016	16
2017	8
2018	7
Total	60

Tabela 1 - Quantidade de publicações por ano

Fonte: Dados da pesquisa

Ano	Estadual	Federal	Total
2014	8	10	18
2015	5	6	11
2016	6	10	16
2017	3	5	8
2018	3	4	7
Total	25	35	60

Tabela 2 - Instituições estaduais e federais

Fonte: Dados da pesquisa

Região	Quantidade de trabalho
Sul	8
Sudoeste	25
Norte	18
Nordeste	6
Centro Oeste	3
Total	60

Tabela 3: Quantidade de publicação por região

Fonte: Dados da pesquisa

Seguiu-se a exploração dos dados com a Análise de Conteúdo chegou-se a três categorias de análise, a saber: resoluções de problemas, formação docente e metodologia e materiais.

5 I CONCLUSÕES

Pode-se evidenciar que as mudanças ocasionadas na forma de ensinar através da "resolução de problemas" pode ser potencializada e realizada com a conscientização de que a questão do "problema" precisa permear os sistemas educacionais em todo o mundo, tanto como um meio de instrução, como metodologia de ensino quanto como uma forma importante para desenvolver o raciocínio lógico em situações da vida real. Através dos dados coletados, com 60 trabalhos entre dissertações e teses percebe-se e a educação matemática tem sido a viabilizadora desse processo. Com a formação das três categorias de análise: resoluções de problemas, formação docente e metodologia e materiais. Entende-se que a resolução de problemas demonstra contribuições significativas na e para a formação de professores de matemática refletindo-se na forma de ensinar matemática no ensino básico.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** 4. ed. Lisboa: Edições 70, 2010

EVAN, R; LAPPIN, G. Construindo uma compreensão significativa do conteúdo da matemática. CUBO. v. 6, n. 17, p. 76-85, 2014.

FREITAS, JLM.**Teoria das situações didáticas.** São Paulo, SP: EDUC, 2014.

FONTANA, EA. **A Resolução de Problemas e a Estatística nas Avaliações Externas do Nono Anodo Ensino Fundamental: SAEB e SARESP.** 2016. 197 f. Dissertação. (Mestrado em Educação). Uberaba (MG): Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2016.

GATTI, BA. **Formação de professores no Brasil:** características e problemas. São Paulo: Ática, 2016.

LIMA, PJS. **Prática argumentativa no ensino de matemática: contribuições para o processo de resolução de problemas verbais.** 2018. 306 f. Tese. (Doutorado em Educação). Programa de pós-graduação em educação. Natal (RN): Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2018

LIMA, RCR. **Conhecimento especializado do professor dos anos iniciais no âmbito da multiplicação: uma metassíntese de teses produzidas entre 2001 e 2012 em diferentes contextos formativos.** 2018. 202 f. Tese. (Doutorado em Educação). Programa de pós- graduação em educação. Campínas (SP): Universidade Estadual de Campinas, 2018.

CAPÍTULO 15

MÉTODO DE LIAPUNOV-SCHMIDT SEM SIMETRIA E APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE REAÇÃO-DIFUSÃO

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 17/04/2022

Rosangela Teixeira Guedes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Cornélio Procópio, Paraná
http://lattes.cnpq.br/6229392665915856

RESUMO: Neste trabalho apresentamos o problema de reação de difusão com condições de Dirichlet. Equações de reação-difusão tem sido utilizadas para modelar fenômenos que envolvem a dispersão e a interação dentro de uma determinada região, enquanto que a parte reativa esta relacionado a interação. O objetivo é a aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt sem Simetria na Equação de Reação-Difusão para determinar os pontos de bifurcação. Resultados do Teorema de Crandall-Rabinowitz determina que o equilíbrio nulo é o ponto de bifurcação do problema de reação de difusão.
PALAVRAS-CHAVE: Bifurcação; Liapunov-Schmidt; Reação de Difusão.

LIAPUNOV-SCHMIDT METHOD WITHOUT SYMMETRY AND APPLICATION IN THE REACTION-DIFFUSION PROBLEM

ABSTRACT: In this work we present the problem of diffusion reaction with Dirichlet conditions. Reaction-diffusion equations have been used to model phenomena that involve dispersion and interaction within a given region, while the reactive part is related to interaction. The objective is to apply Liapunov-Schmidt Reduction without Symmetry in the Reaction-Diffusion Equation to determine the bifurcation points. Results of the Crandall-Rabinowitz Theorem determines that the null equilibrium is the bifurcation point of the diffusion reaction problem.
KEYWORDS: Bifurcation; Liapunov-Schmidt; Diffusion Reaction.

1 | INTRODUÇÃO

Este trabalho considera o problema de reação de difusão com condições de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = Du_{\xi\xi} - f(u), 0 < \xi < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

e u e uma função escalar, e por simplicidade, consideramos a difusão em apenas uma dimensão espacial. Sejam as hipotéses $f(0) = 0$ e $f'(0)<0$ então $u = 0$ é um ponto de equilíbrio isolado da ODE associada a equação (1) e é instável. Além disso, com as condições de Dirichlet, $u = 0$ também é solução da EDP. Se a difusão é suficientemente pequena(resp. grande), a solução trivial da EDP é instável(resp. estável). Equações de reação-difusão são problemas comuns de bifurcação, o qual pode ser resolvido pela Redução de Liapunov-Schmidt e a solução trivial do problema (1) é do tipo bifurcação trascrítica se $f''(0)\neq0$. Equações de reação-difusão são uma fonte comum de problemas que apresentam bifurcação.

A seguir, apresentamos alguns resultados importantes que são baseados nas referências

[1], [2] e [3] que são fundamentais para o resultado Principal da seção 3 que é a aplicação da Redução de Liapunov-Schmidt sem Simetria na Equação de Reação-Difusão (1).

2 I RESULTADOS DE BIFURCAÇÃO, TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA, TEOREMA DE CRANDALL-RABINOWITZ E O MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE LIAPUNOV-SCHMIDT SEM SIMETRIA

Definição 2.1: Sejam M um espaço métrico, X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $F{:}MxX \to Y$ uma aplicação contínua.

Seja S = $\{(\lambda, u(\lambda)) \backslash \lambda \in M\}$ uma curva contínua de soluções de $F \equiv 0$. Dizemos que $(\lambda 0, u0) \in M \times X$ é um ponto de bifurcação de $F \equiv 0$ com relação a curva S se são satisfeitas as seguintes afirmações:

(i) (λ0,u0) é um ponto interior de S;

(ii) para toda vizinhança U de $(\lambda 0, u0) \in M \times X$, existe uma solução de $F \equiv 0$ que pertence a U e não pertence a S.

Sejam as soluções analíticas de um problema não-linear $F(x,y) = 0$, onde F é uma aplicação $F{:}UxV \to Z$ com conjuntos abertos $U \subset X$, $V \subset Y$, e em que X,Y,Z são espaços de Banach(real), segue o Teorema da Função Implícita.

Teorema 2.2(Teorema da Função Implícita) Seja $F(x,y) = 0$ tem uma solução $(x0,y0) \in U \times V$ tal que a derivada de Fréchet de F em relação a x em $(x0,y0)$ é bijetora: $F(x0,y0) = 0$, $DxF(x0,y0){:}X \to Z$ é limitada (contínua) com inversa limitada (Teorema de Banach). Suponha que F e DxF sao contínuas:

$$F \in C(U \times V,Z),\ DxF \in C(U \times V,L(X,Z)), \text{ em que } L(X,Z)$$

denota o espaço de Banach de operadores lineares limitados de X em Z dotado com o operador norma.

Então existe uma vizinhança $U1 \times V1$ em $U \times V$ de $(x0,y0)$ e uma aplicação $f : V1 \to U1 \subset X$ tal que: $f(y0) = x0$, $F(f(y),y) = 0$, $\forall y \in V1$.

Além disso, f´ é contínua em $V1$(isto é, $f \in C(V1,X)$). Finalmente, cada solução de $F(x,y) = 0$ em $U1 \times V1$ é da forma $(f(y),y)$.

Uma condição necessária para que $(\lambda 0,\ u0)$ seja um ponto de bifurcação é que o operador $duf(\lambda 0,\ u0)$ não seja inversível. No caso em que isso não ocorre, pelo Teorema das Funções Implícitas, podemos concluir, que $(\lambda 0,\ u0)$ não é um ponto de bifurcação.

Teorema 2.3(Crandall-Rabinowitz) Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$, S um aberto em $\mathbb{R}$, V um aberto em X, F uma aplicação de classe C^2 em $S \times V$ a valores em Y e $\lambda 0 \in$ S satisfazendo as seguintes afirmações:

(i) $F(\lambda,0) = 0$, para todo $\lambda \in$ S;

(ii) a dimensão do Ker($(duF(\lambda 0,u0))$ e a codimensão de $R(duF(\lambda 0,u0))$ sobre $\mathbb{R}$ são iguais a um;

(iii) o núcleo de $duF(\lambda 0,u0)$ é gerado por $u0$, onde $u0 \in X$;

(iv) $d^2_{\lambda u}F(\lambda 0,0).u0$ não pertence à imagem de $d_uF(\lambda 0,0)$.

Seja Z um subespaço fechado de X tal que $X = [u0] \oplus Z$(isto é, todo $u \in X$ pode ser escrito como $u = \alpha u0 + z$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $z \in Z$). Então, existem $\delta > 0$, $\lambda :] -\delta,\delta[\to \mathbb{R}$ e $\varphi :] -\delta,\delta[\to Z$ de classe C^1, com $\lambda(] -\delta,\delta[)$ contido em $] -\delta,\delta[$ e $\varphi(] -\delta,\delta[)$ contido em $B\delta(0)$, onde $B\delta(0)$ é a bola aberta em Z, tais que (v) $\lambda(0) = \lambda 0$; (vi) $\varphi(0) = 0$ e (viii) $F(\lambda(s),s(u0 + \varphi(s))) = 0$, para todo $s \in] -\delta,\delta[$. Além disso, existe uma vizinhança de $(\lambda 0,u0)$ em $S \times V$ tal que todo zero de F é da forma $(\lambda,0)$ ou $(\lambda(s),s(u0 + \varphi(s)))$, para algum $s \in] -\delta,\delta[$.

Definição 2.4: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K. Um operador $L : X \to Y$ linear contínuo é um operador de Fredholm se são verdadeiras as seguintes afirmações:

(ii) Ker(L) é um subespaço de X de dimensão finita sobre K;

(ii) R(L)(Imagem de L) é um subespaço de codimensão finita de Y, isto é, a dimensão de Y/R(L) sobre Ké finita.

Proposição 2.5: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $L : X \to Y$ um operador linear contínuo. Se a dimensão de R(L) é finita, então R(L) é um subespaço fechado de Y.

Demonstração: Seja $\{\overline{v_1}, \overline{v_2},..., \overline{v_n}\}$ uma base de $Y/R(L)$. Mostraremos que $Y= [v_1, v_2,..., v_n] \oplus R(L)$. Se $v \in Y$. Então, $\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{v_j} = \overline{\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j}$ e assim $v = \sum^{n} \beta_j v_j + v_0$ em que $v0 \in R(L)$. Se $v \in [v1,v2,...,vn] \cap R(L)$, então $\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{v_j} = \overline{\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j} \in R(L)$ e $\overline{0} = \overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{v_j}$. Como $\{\overline{v_1}, \overline{v_2},..., v_n\}$ é linearmente independente, temos que $\beta j = 0$, para todo $j \in\{1,...,n\}$ e, portanto $v = 0$. Em seguida, provaremos que $R(L)$ é fechado em Y. Seja $T : X/Ker(L) \times K^n \to Y$ definida por $T(\overline{u}, x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j + L(u)$ onde os v'_j são como acima descrito. Temos que T é sobrejetora. Mostraremos que T é injetora. De fato, seja $(\bar{u}, x_1,...,x_n)$ tal que $T(\bar{u}, x_1,...,x_n)=0$, isto é, $L(u) = -\sum_{j=1}^{n} x_j v_j$Então, $\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{v_j} = \overline{0}$e como $\{\overline{v_1}, \overline{v_2},..., \overline{v_n}\}$ é linearmente independente, segue que $xj = 0$, para todo $j \in\{1,...,n\}$. Logo, $L(u) = 0$, isto é, $u \in Ker(L)$ e, e assim $\bar{u}= \bar{0}$ Desse modo, pelo Teorema da Aplicação Aberta, a imagem por T de subconjuntos fechados em X é um subconjunto fechado em Y, e portanto $T(X/Ker(L) \times\{(0,...,0)\}) = R(L)$ é fechado em Y.

Definição 2.6: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $L : X \to Y$ um operador de Fredholm. O índice de L é o número inteiro $dim_K\ Ker(L) - codim_K\ R(L)$ e o denotamos por ind(L).

A Proposição seguinte nos fornece uma propriedade dos operadores de Fredholm.

Proposição 2.7: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $L : X \to Y$ um operador de Fredholm. Então, existem M e N subespaços fechados de X e Y, respectivamente, tais que

(i) X é uma soma direta de Ker(L) e M;   (ii) Y é uma soma direta de N e R(L).

Demonstração: O item (ii) foi provado na Proposição 2.4.2. Para provarmos o item (i), suponhamos que $Ker(L) = [u1,...,um]$ e seja $f1 : [u1] \to K$ o funcional linear definido por $f1(\alpha 1 u1) = \alpha 1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $g1 : X \to K$ funcional linear tal que $g1j[u1] = f1$. Seja $X1 = Ker(g1)$. Afirmamos que $X = [u1] \oplus X1$. De fato, se $u \in X$, então $u = g1(u)u1 + (u - g1(u)u1)$, onde $g1(u)u1 \oplus [u1]$ e $u - g1(u)u1 \in X1$. Se $u \in [u1] \cap X1$, então $u = \alpha 1 u1$ e $0 = g1(\alpha 1 u1) = \alpha 1$ e, assim, $u = 0$. Seja $V = [u1,...,um-1]$ e suponhamos que $X = V \oplus P$, onde P e um subespaço fechado de X. Como $u_m \notin V$, existem $\alpha_1,...,\alpha_{m-1} \in K$ tais que um $= \alpha 1u1+...+\alpha m-1um-1+v$, onde $v \in P$ e $v \neq 0$ Seja $f : [v] \to K$ o funcional linear definido por $f(\alpha v) = \alpha$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $g : P \to K$ funcional linear tal que $gj[v] = f$. Afirmamos que $P = [v] \oplus Ker(g)$. Com efeito, se $u \in P$, então $u = g(u)v + (u-g(u)v)$, onde $g(u)v \in [v]$ e $u-g(u)v \in Ker(g)$. Se $u \in [v] \cap Ker(g)$, então $u = \alpha v$ e $0 = g(\alpha v) = \alpha$ e, assim $u = 0$. Logo,

$$X = V \oplus P = [u1,...,um-1] \oplus [v] \oplus Ker(g) = Ker(L) \oplus Ker(g).$$

Descrevemos abaixo o Processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt. Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e $F : K^{k+1} \times X \to Y$ um operador suave que satisfaz $F(0,0) = 0$. O nosso objetivo é utilizar o processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt para resolver a equação $F(\lambda 1,\lambda 2,...,\lambda k,\lambda k+1,u) = 0$ numa vizinhança da origem em $K^{k+1} \times X$. Vamos supor que $L := d_uF(0,0)$(derivada de F com relação a segunda variável calculada em (0,0)) seja um operador de Fredholm de índice zero.

Primeiro Passo: Decompomos os espaços X e Y como $X = ker(L) \oplus M$ e $Y = N \oplus R(L)$, onde M e N são subespaços fechados de X e Y. Notemos que, como L é um operador de Fredholm de índice zero, temos que $\dim_K Ker(L) = \dim_K (N)$.

Segundo Passo: Seja $Q : Y \to R(L)$ a projeção com $Ker(Q) = N$. Observemos que $F(\lambda,u) = 0$ se, e somente se, $Q(F(\lambda,u)) = 0$ e $(I - Q)(F(\lambda,u)) = 0$.

Terceiro Passo: Usando o fato de que $X = Ker(L) \oplus M$, escrevemos $u=v+w$, onde $v \in Ker(L)$ e $w \in M$. Seja $G : K^{k+1} \times Ker(L) \times M \to R(L)$ a função definida por $G(\lambda,v,w) = Q(F(\lambda,v + w))$. Então, $d_wG(0,0,0).w = Q(d_uF(0,0).w) = Q(L.w) = L.w$, para todo $w \in M$. Notemos que $L : M \to R(L)$ é injetora. De fato, seja $u \in M$ tal que $L(u) = 0$. Então, $u \in Ker(L) \cap M = \{0\}$, portanto $u=0$. A aplicação L também é sobrejetora. Com efeito, seja $v \in R(L)$. Então existe $u \in X$ tal que $v = L(u)$. Podemos escrever $u = v0 + w0$, onde $v0 \in Ker(L)$ e $w0 \in M$, obtendo $v = L(w0) \in L(M)$. Como M e R(L) são espaços de Banach e $L : M \to R(L)$ é linear, contínua e sobrejetora, pelo Teorema da Aplicação Aberta, que $L^{-1} : R(L) \to M$ é linear e contínua. Logo, pelo Teorema das Funções Implícitas, existem $B\delta 1(0) \subset K^{k+1}$, $B\delta 2(0) \subset Ker(L)$, $B\delta 3(0) \subset M$ e $W : B\delta 1(0) \times B\delta 2(0) \longrightarrow B\delta 3(0)$ tal que $W(0,0) = 0$, para todo $\lambda \in B\delta 1(0)$ e para todo $v \in B\delta 2(0)$, tem-se $Q(F(\lambda,v + w)) = 0$ se, e somente se, $w = W(\lambda,v)$.

Quarto Passo: Seja $\phi : B\delta 1(0) \times B\delta 2(0) \to N$ a função definida por

$$\phi(\lambda,v) = (I - Q)(F(\lambda,v + W(\lambda,v)).$$

Quinto Passo: Seja $\{v1,v2,...,vm\}$ uma base de Ker(L) sobre K. Como ker(L) e N têm a mesma dimensão, seja $\{u1,u2,...,um\}$ uma base de N sobre $\mathbb{K}$ e $\{v_1{}^*, v_2{}^*, ..., v_m{}^*\}$ a base dual de $\{u1,u2,...,um\}$. Então,$< vi^*,uj >= vi^*(uj) = \delta ij$, para $i,j \in \{1,...,m\}$. Usando o fato de que

ϕ(λ,v) є N, para todo λ є Bδ1(0) e para todo v є Bδ2(0), definimos a funçao ψi.

Sexto Passo: Seja i є{1,...,m} e seja ψi : Bδ1(0) ×K^m →K a função definida como

$$\psi_i(\lambda,(x_1,x_2,...,x_m)) = \left\langle {v_i}^*, \varphi\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right\rangle$$

logo, para i = 1,2,...,m substituindo o Quarto Passo no Sexto Passo e usando as projeções, podemos escrever

$$\psi_i(\lambda,(x_1,x_2,...,x_m)) = \left\langle {v_i}^*, F\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right)\right\rangle$$

O próximo resultado garante localmente uma correspondência biunívoca entre as soluções de F ≡ 0 e as soluções de ψ ≡ 0, onde ψ = (ψ1,...,ψm) e a equação ψ ≡ 0 é chamada de equação de bifurcação .

Proposição 2.8: Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo K e F : Kk+1 ×X → Y um operador suave satisfazendo F(0,0) = 0. Seja W a função definida no terceiro passo do Processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt e seja ψ a função definida no sexto passo. São equivalentes as seguintes afirmações:

a) (λ,x1,x2,...,xm) є Bδ1(0) ×Km é uma solução de ψ ≡ 0.

b) $\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j\, v_j + W\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\, v_j\right)\right)$є Bδ1(0) × Bδ2(0) × Bδ3(0) é uma solução de F ≡ 0.

Demonstração: Seja (λ,x1,x2,...,xm) є Bδ1(0) ×K^m uma solução de ψ ≡ 0. Então,

$$0 = \left\langle {v_i}^*, \varphi\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right\rangle = \left\langle {v_i}^*, F\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right)\right\rangle$$

para todo i є{1,...,m}, e assim $F\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right) = 0$ provando a afirmação (b).

Seja $\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right) \in B_{\delta_1}(0) \times B_{\delta_2}(0) \times B_{\delta_3}(0)$ uma solução de F ≡ 0. Sendo W a função definida no terceiro passo da Decomposição, temos que $Q\left(F\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right)\right) = 0$ e portanto $\varphi\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right) = 0$ então ψ(λ,x1,...,xm) = 0, mostrando que a afirmação (b) implica (a). A seguir, obtemos o valor de algumas derivadas de ψ na origem. Estas derivadas aparecem em algumas hipóteses do Equivariant Branching-Lemma.

Consideremos a equação $Q\left(F\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^{m} x_j v_j\right)\right)\right) = 0$ e fixemos i є {1,2,...,m} e derivamos a equação anterior com relação a variável xi. Obtemos:

$$Q\left(d_u F\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0\, v_j + W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0\, v_j\right)\right) . \left(v_i + d_v W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^{m} x_j^0\, v_j\right) .v_i\right)\right) = 0$$

escrevendo $\lambda_0 = 0,\ (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = (0,0,...,0)$ e usando que W(0,0) = 0 e L = duF(0,0), obtemos Q(L(dvW(0,0).vi)) = 0.

Temos que L(dvW(0,0).vi) є Ker(Q) = N. Pelo fato de N ∩ R(L) = {0} segue que L(dvW(0,0).vi) = 0. Logo, dvW(0,0).vi є Ker(L) ∩ M = {0}, isto é, dvW(0,0).vi=0 e temos que

$$\varphi\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j\right) = (I-Q)\left(F\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j\right)\right)\right)$$

e seja $\widetilde{\varphi}(\lambda, x_1, x_2, ..., x_m) := \varphi\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j\right)$. Fixemos i,j,lє{1,2,...,m}. temos:

- $\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_i}(0,0) = 0$

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_i}(0,0) = (I-Q)(d_u F(0,0).(v_i + d_v W(0,0).v_i))$$

vi є Ker(duF(0,0)) e dvW(0,0).vi = 0;

- $\frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j}(0,0) = (I-Q)(d_u^2 F(0,0).(v_i, v_j$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \widetilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(0,0) &= (I-Q)(L(d_v^3 W(0,0)(v_i, v_j, v_l))) \\ &+ (I-Q)(d_u^2 F(0,0)(v_i, d_v^2 W(0,0).(v_j, v_l))) \\ &+ (I-Q)(d_u^2 F(0,0)(v_j, d_v^2 W(0,0).(v_i, v_l))) \\ &+ (I-Q)(d_u^2 F(0,0)(v_l, d_v^2 W(0,0).(v_i, v_j)))\end{aligned}$$

$+ \ (I-Q)(d_u^3 F(0,0).(v_i, v_j, v_l$)); e para s є{1,2,...,k + 1} fixado temos:

- $\frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}}{\partial x_i \partial \lambda_s}(0,0) = (I-Q)(d_u^2 F(0,0).(v_i, d_{\lambda_s} W(0,0)) + d_{u\lambda_s}^2 F(0,0).(v_i))$

Agora, determinamos $d_v^2 W(0,0).(v_i, v_j),\ d_v^2 W(0,0).(v_i, v_l),\ d_v^2 W(0,0).(v_j, v_l)$ e dλsW(0,0). Faremos os cálculos apenas para $d_{\lambda_s} W(0,0)$ e $d_v^2 W(0,0).(v_i, v_j)$, pois os outros casos são análogos. Consideremos a equação

$$Q\left(F\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j\right)\right)\right) = 0 \qquad (2)$$

Derivando a equação (2) em relação à variável xi obtemos

$$Q\left(d_u F\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j + W\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j\right)\right) . \left(v_i + d_v W\left(\lambda, \sum_{j=1}^m x_j v_j\right) .v_i\right)\right) = 0;$$

e derivando esta equação com relação à variável x_j temos $Q\left(d_u F\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j + W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j\right)\right).\left(d_v^2 W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j\right).(v_i, v_j)\right)\right) + Q\left(d_u^2 F\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j + W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j\right)\right)\right).(v_i + d_v W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j\right).v_i, v_j + d_v W\left(\lambda_0, \sum_{j=1}^m x_j^0 v_j\right).v_j) = 0$. Fazendo $\lambda_0 = 0,\ (x_1^0, ..., x_m^0) = (0, ..., 0)$ e usando que dvW(0,0).vi = 0, W(0,0) = 0, L = duF(0,0) e Q e a projeção em R(L) obtemos L(d2vW(0,0).(vi,vj)) = −Q(d2uF(0,0).(vi,vj)). Como LjM é inversível, segue que $d_v^2 W(0,0).(v_i, v_j) = -L^1(Q(d_u^2 F(0,0).(v_i, v_j)))$ e agora, determinamos Wλs(0,0).

Derivando a equação (2) em relação à variável λs:

$$Q\left(d_{\lambda_s}F\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j+W\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j\right)\right)\right)$$

$$+Q\left(d_uF\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j+W\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j\right)\right).\left(d_{\lambda_s}W\left(\lambda_0,\sum_{j=1}^{m}x_j^0\,v_j\right)\right)\right)=0$$

e fazendo $\lambda_0 = 0,\ (x_1^0, ..., x_m^0) = (0, ..., 0)$ temos Q(dλsF(0,0) + L.(dλsW(0,0))) = 0,isto é, L(dλsW(0,0)) = –Q(dλsF(0,0)), e assim dλsW(0,0) = –L–1(Q(dλsF(0,0))).

Portanto,

- $\frac{\partial\psi_i}{\partial x_i}(0,0) = \left\langle v_i^*, \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_i}(0,0)\right\rangle$ = 0;
- $\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_i\partial x_j}(0,0) = \left\langle v_i^*, \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial x_i\partial x_j}(0,0)\right\rangle = < v_i^*, d_u^2F(0,0).(v_i, v_j) >$
- $\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial x_l}(0,0) = < v_i^*, d_u^2F(0,0).(v_j, v_l) >$
- $\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_i\partial x_l}(0,0) = < v_i^*, d_u^2F(0,0).(v_i, v_l) >$
- $\frac{\partial^3\psi_i}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l}(0,0) = \left\langle v_i^*, \frac{\partial^3\widetilde{\varphi}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_l}(0,0)\right\rangle = < v_i^*, V >$ onde

V = d3uF(0,0).(vi,vj,vl) +

d2uF(0,0).(vi,d2uW(0,0).(vj,vl)

+d2uF(0,0).(vj,d2uW(0,0).(vi,vl))

$+ \quad d_u^2F(0,0).(v_l, d_u^2W(0,0).(v_i, v_j$));

- $\frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_s}(0,0) = \left\langle v_i^*, \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\lambda_s}(0,0)\right\rangle = < v_i^*, d_{\lambda_s}F(0,0) >$
- $\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial\lambda_s}(0,0) \quad = \quad \left\langle v_i^*, \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial x_j\partial\lambda_s}(0,0)\right\rangle = < v_i^*, d^2_{u_{\lambda_s}}F(0,0).v_j > + \quad < v_i^*, d_u^2F(0,0).(v_j, -L^{-1}(Q(d_{\lambda_s}F(0,0)))) > .$

Teorema 2.9: Existe uma vizinhança U2 × V2 de (x0,y0) em U × V ⊂ X × Y tal que o problema F(x,y) = 0, para(x,y) ϵ U2 × V2 é equivalente a um problema de dimensão finita

$$\begin{cases} \Phi(v,y) = 0, para(v,y) \in \mho_2 xV_2 \subset NxY \\ onde \mho_2 xV_2 \rightarrow Z_0 écontínuae \Phi(v_0,y_0) = 0, (v_0,y_0) \in \mho_2 xV_2 \\ afunção\Phi échamadadefunçãodebifurcação. \end{cases}$$

Demonstração: O problema F(x,y) = 0, para(x,y) ϵ U2 × V2 é equivalente ao

sistema(pelo Segundo Passo de Decomposição de Liapunov-Schmidt)

QF(Px + (I – P)x,y) = 0 e (I – Q)F(Px + (I – P)x,y) = 0 em que Px = v є N e (I – P)x = w є X0. Agora, definimos

$$\begin{cases} G: \tilde{U}_2 x W_2 x V_2 \to \Re \\ G(v,w,y) \equiv (I-Q)F(v+w,y) \\ v_0 = Px_0 \in \tilde{U}_2 \subset N \\ w_0 = (I-P)x_0 \in W_2 subse \subset X_0 \end{cases}$$ e

$\tilde{U}_2$, W_2 são vizinhanças tal que $\tilde{U}_2 + W_2 \subset U \subset X$. temos G(v0,w0,y0) = 0 e por nossas escolhas dos espaços DwG(v0,w0,y0) = (I – Q)DxF(x0,y0) : X0 → $\Re$ é bijetora.

Agora, pela aplicação do Teorema da Função Implícita então G(v,w,y)=0 para (v, w, y) є $\tilde{U}_2 x W_2 x V_2$ é equivalente a w = Ψ(v,y) para algum $\psi: \tilde{U}_2 x V_2 \to W_2 \subset X_0$ tal que $\psi(v_0, y_0) = w_0$ Inserindo a função Ψ no sistema inicial temos Φ(v,y) ≡ QF(v + Ψ(v,y),y) = 0.

O teorema da Função Implícita também fornece a continuidade da função Ψ.

Corolário 2.10: Nas notações do Teorema 2.9, se F є C^1(U × V,Z), obtemos também Ψ є C^1($\tilde{U}$2 × V2,X0), ψ є C^1 ($\tilde{U}_2 x V_2 x Z_0$) tal que

$$\begin{cases} \Psi(v_0, y_0) = w_0, \ d_v\Psi(v_0, y_0) = 0 \in L(N, X_0) \\ d_v\Phi(v_0, y_0) = 0 \in L(N, Z_0). \end{cases}$$

3 | RESULTADOS E ANÁLISE

Nesta seção aplicamos os resultados da seção 2 dando enfoque no Método de Liapunov-Schmidt Sem Simetria na aplicação da Equação de reação-difusão (1). Pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz o equilíbrio nulo é ponto de bifurcação do problema(1). A Bifurcação de soluções de equilíbrio da EDP com estrutura espacial não- trivial está associada a está mudança de estabilidade. A equação de equilíbrio associada a equação (1) é quando ut = 0 para todo t, isto é,

$$Du\xi\xi - f(u) = 0. \quad (3)$$

Fisicamente, a forma mais natural para variar os efeitos de difusão é manter D constante mas variar o comprimento l do intervalo, desta forma é conveniente introduzir uma variável escalar $\eta = \frac{\xi}{l}$. Pela Regra da Cadeia, temos que:

$$u_\eta(\eta, t) = u_\xi(\xi, t)\frac{d\xi}{d\eta} = u_\xi(\xi, t)l$$

e

$$u_{\eta\eta}(\eta, t) = lu_{\xi\xi}(\xi, t)\frac{d\xi}{d\eta} = u_{\xi\xi}(\xi, t)l^2$$

então

$u_{\xi\xi}(\xi, t) = \frac{1}{l^2}u_{\eta\eta}(\eta, t)$. Como$\eta = \frac{\xi}{l}$ e $0 < \xi < l$, por mudança de escala temos 0 < η < 1. Portanto, a equação de equilíbrio associada a equação de reação-difusão (3) com condições de Dirichlet se escreve como

$$\begin{cases} u_{\eta\eta} + \lambda f(u) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} (4)$$

em que$\lambda = \frac{l^2}{D}$ é o parâmetro de bifurcação. Definimos no lado esquerdo da equação (4) uma aplicação em que ϕ:$X x \Re \rightarrow C^0(0,1)$

$$(u, \lambda) \rightarrow \Phi(u, \lambda)$$
$$= -u_{\eta\eta} + \lambda f(u)$$

em que X={u є C^2(0,1):u(0)=u(1)=0}.Por hipótese f(u) = 0 então a solução u(η,t) = 0 é ponto de equilíbrio da equação (4) pois –uη,η(η,t) + λf(u(η,t)) = 0.

A linearização(derivação) da equação (4) é obtida como

$$Lu = -u'' + \lambda f'(0)u (5)$$

Assim, o especto do operador L consiste dos autovalores do operador $-\frac{d^2}{d\eta^2}$ deslocado $\lambda f'(0)$. Considere por enquanto *Lu=-u"* e *u*≠ 0 tal que seja autofunção do operador L, isto é, Lu = βu. Assim, *-u"=βu* então *u"=βu* =0. A equação característica associada a este último resultado, segue que $m^2+\beta=0$. Então $m=\pm\sqrt{[\beta]}$ e as soluções são

u(t) = C1e0.tcos(βt) + C2e0.t sin(βt), Mas u(0) = u(1) = 0 então

u(0) = C1cos(β.0) então C1 = 0 e agora, u(t) = C2e0.t sin(√at) e assim

u(1) = C2 sin(β) = 0, como $C_2\neq0$ então $sin(\sqrt{[\beta]})=0$ e implica que $\sqrt{[\beta]}$ = nπ, n є ℕ e então βn = $n^2\pi^2$. Logo, o espectro do operador L (a linearização da equação (4) na solução trivial) é dado por $n^2\pi^2+\lambda f'(0)$, n = 1,2,... e são todos positivos se $\lambda < \frac{\pi^2}{|f'(0)|}$. Portanto u = 0 é solução estável de (2) para tal λ. Se λ estiver perto de$\lambda_0 = \frac{\pi^2}{|f'(0)|}$, temos que (dΦ)0,λ0 é singular e a dimensão do núcleo do operador (dΦ)0,λ0 é unidimensional e gerado por

u0(η) = sin(πη). Analisamos as soluções da equação (4), pelo Método da Redução de Liapunov-Schmidt. Na etapa 1 desta Redução, os complementos ortogonais é dado por M= [<{sin(πη)}]⊥ e N= [ImL]⊥ = KerL+ = <{sin(πη)} o qual a última igualdade foi usado que L é um operador auto-adjunto(isto é , limitado e simétrico). Na etapa 5, escolha v1 = v* = sin(πη).

A Redução do Método de Liapunov-Schmidt resulta em uma equação de uma única variável g(x,λ) = 0 cujas soluções localmente estão em correspondência biunívoca com as soluçoes da equação (4). Não é possível deteminar uma fórmula explícita para g(x,λ), mas analisemos o suficiente das derivadas de g no ponto de bifurcação. Em x = 0,λ = λ0, temos que g = gx = gλ = 0. Temos também que

$$g_{xx} = \lambda_0 f''(0) \int_0^1 v_1^3 d\eta \quad \text{e} \quad g_{\lambda x} = \lambda_0 f'(0) \int_0^1 v_1^2 d\eta \qquad (6)$$

Supondo por hipotese que $f''(0)\neq00$, então gxx e gλx são ambos não-nulos. Portanto, a solução trivial é bifurcação transcrítica em λ = λ0 se $f''(0)\neq0$. Pode acontecer que $f''(0)=0$, por exemplo, se f(u) e uma função ímpar e neste caso, a bifurcação é supercrítica ou

subcrítica dependendo do sinal de $f''(0)$. Por uma mudança adequada de coordenadas $g(x,\lambda)$ pode ser transformado para a forma

$$\pm x2 - (\lambda - \lambda 0)x. \quad (7)$$

Para $\lambda \neq \lambda_0$ a equação (7) tem dois zeros, nomeadamente solução trivial $x = 0$ e a solução não-trivial $x = \pm(\lambda - \lambda 0)$.

Este último zero,é a correspondência entre soluções de $g(x,\lambda) = 0$ e soluções da equação $\Phi(u,\lambda) = 0$. Isto é, $g(x,\lambda) = 0$ se e somente se $\Phi(xv1 + W(xv1,\lambda),\lambda) = 0$. A solução (x,λ) de $g(x,\lambda)$ está associada a solução $u = xv1 + W(xv1,\lambda)$, ou ainda,

$$u(\eta) = xv1(\eta) + W(xv1(\eta),\lambda). \quad (8)$$

Além disso, $Wx(0,\lambda 0) = W\lambda(0,\lambda 0) = 0$. Escrevendo W em Série de Taylor em $(0,\lambda 0)$ temos que

$$W(xv1,\lambda 0) = W(0,\lambda 0) + Wx(0,\lambda 0)x + W\lambda(0,\lambda 0)x + O(x2).$$

Então $W(xv1,\lambda 0) = O(x2)$ dos resultados anteriores e o fato que $W(0,\lambda) = 0$.

Portanto, $u(\eta) = xv1 + W(xv1(\eta),\lambda 0) = xv1 + O(x2)$, isto é, as soluções não-triviais tem uma estrutura espacial de v1 perto do ponto de bifurcação.

No entanto, se f(u) e uma função ímpar então $f''(0)=0$ e neste caso,

$gxx = 0$ e

$$g_{xxx} = \lambda_0 f'''(0) \int_0^1 v_1^4 d\eta.$$

Agora, a bifurcação é supercrítica ou subcrítica de acordo com $f'''(0)=0$ é positivo ou negativo, com a forma $\pm x^3 - \lambda x$.

Considerando a função f(u) tal que tenhamos a sequência:

$$f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{k-1}(0) = 0 \text{e}\, f^n(0) \neq 0$$

então temos o problema de bifurcação com a forma canônica $\pm xn - \lambda x = 0$.

4 I CONCLUSÕES

O Teorema de Crandall-Rabinowitz fornece uma condição suficiente para que um ponto $(\lambda 0,u0)$ seja um ponto de bifurcação local e o Processo de Decomposição de Liapunov-Schmidt determina a função de bifurcação. Por fim, pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz o equilíbrio nulo é ponto de bifurcação do problema da equação de difusão e o problema de bifurcação é apresentado na forma canônica e dependendo das derivadas de primeira ordem até n-ésima ordem da função f no equilíbrio nulo a bifurcação é supercrítica ou subcrítica.

REFERÊNCIAS

Grindrod, P. The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations, Patterns and Waves. **Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series**, p. 1-275, 1996.

H. Kielhofer. **Bifurcation Theory:An Introduction with Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 2011.

M. Golubitsky. **Singularities and Groups in Bifurcation Theory**, vol I and vol II. Espringala,Harper-Row, New York, 1985.

CAPÍTULO 16

O “SEGUIR REGRAS” DE WITTGENSTEIN: UMA ANÁLISE A PARTIR DA CONSTRUÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES AFIM

Data de aceite: 02/05/2022

Tatiana Lopes de Miranda
Mestra em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará – UFPA. Professora na Instituição SEDUC Ananindeua, Pará, Brasil
https://orcid.org/0000-0002-6469-2769

RESUMO: Analisaremos as construções gráficas de funções afim para mostrar a relevância de seguir regras em matemática, no sentido proposto por Wittgenstein (2017). O tema emergiu no ensino de função: Quais as causas dos erros na construção gráfica de uma função? O pressuposto teórico escolhido é a ideia de seguir regras que aparece na obra Investigações Filosóficas escrita por Wittgenstein. Com o objetivo de entender o processo de aprendizagem sobre as construções gráficas, optamos pela pesquisa qualitativa. Verificamos os gráficos elaboradas por discentes do 9º ano do Ensino Fundamental. Resultados iniciais apontaram que a norma matemática “dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém” é essencial, contudo, apesar de entenderem a necessidade de obtenção de dois pontos, os alunos não sabem como encontrá-los, sendo necessário “mostrar as regras” para predispor o aluno a ver a reta em um eixo cartesiano como o gráfico de uma função afim.

PALAVRAS-CHAVE: Wittgenstein; Construção Gráfica; Função Afim.

WITTGENSTEIN’S “FOLLOW RULES”: AN ANALYSIS BASED ON THE GRAPHICAL CONSTRUCTION OF LINEAR FUNCTIONS

ABSTRACT: We will analyze the graphic construction of functions to show the relevance of following rules in mathematics, in the sense proposed by Wittgenstein (2017). The theme arose in the function of the function: What are the causes of errors in the graphic construction of a function? The supposed theoretical chosen is the idea of following rules that appears in the work Wittgenstein’s Philosophical Investigations. To understand the process of learning about graphic constructions, we opted for qualitative research. We check the graphics produced by 9th grade students. The initial results show that the mathematical norm “data from different points, there is a single line that contains them” is fundamental, however, despite understanding the need to obtain points, students in the knowledge of how to find them, and are needed “ show the rules ”to predispose the student to see the line in a Cartesian as the graph of a function.

KEYWORDS:Wittgenstein; Graphic Construction; Linear function.

“SEGUIR REGLAS” DE WITTGENSTEIN: UN ANÁLISIS BASADO EN LA CONSTRUCCIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES LINEALES

RESUMEN: Analizaremos la construcción gráfica de funciones para mostrar la relevancia de seguir reglas en matemáticas, en el sentido propuesto por Wittgenstein (2017). El tema surgió en la

enseñanza de la función: ¿Cuáles son las causas de los errores en la construcción gráfica de una función? El supuesto teórico elegido es la idea de seguir reglas que aparece en la obra Investigaciones filosóficas de Wittgenstein. Para comprender el proceso de aprendizaje sobre construcciones gráficas, optamos por la investigación cualitativa. Comprobamos las gráficas elaboradas por alumnos de 9º de primaria. Los resultados iniciales señalaron que la norma matemática “dados dos puntos distintos, hay una sola línea que los contiene” es fundamental, sin embargo, a pesar de comprender la necesidad de obtener dos puntos, los estudiantes no saben cómo encontrarlos, y es necesario “mostrar las reglas” para predisponer al estudiante a ver la línea en un eje cartesiano como la gráfica de una función.
PALABRAS CLAVE: Wittgenstein; Construcción gráfica; Función lineal.

1 I INTRODUÇÃO

A álgebra escolar é vista por muitos como uma área da matemática que aumenta a capacidade de abstração, generalização e uma poderosa ferramenta para solucionar problemas. Apesar de sua importância, diversos autores apontam para as dificuldades dos alunos de resolverem situações envolvendo seus conteúdos como, por exemplo, as equações e funções nas séries finais do ensino fundamental.

Na história, a álgebra é relevante, pois foi através de seu desenvolvimento que a matemática passou a ser um instrumento essencial para a resolução de problemas do cotidiano. A história da construção da linguagem algébrica mostra como a matemática se consolidou como uma área altamente desenvolvida e estimada devido sua aplicabilidade em diferentes ramos do conhecimento como, por exemplo, a mecânica, física, astronomia e Geodésia.

Contudo, apesar da importância relatada, a álgebra no âmbito do ensino é vista como uma área que apresenta grandes dificuldades em sua compreensão. Segundo Fossa (2012), um dos fatores que gera essas dificuldades é a transfiguração do uso das letras, que antes eram a chave para o entendimento da língua natural e com o início do estudo da álgebra passam a ser associadas aos números e outros símbolos matemáticos.

A relação de *importância x dificuldade* que envolve a álgebra foi o ponto que nos chamou atenção para iniciarmos uma pesquisa relacionada a este campo do conhecimento matemático, com o foco na aprendizagem dos gráficos das funções do tipo afim.

A análise sobre os gráficos das funções de 1º e 2º graus será feita segundo a perspectiva da linguagem matemática, fundamentada nos pressupostos de Wittgenstein (2017). Realizamos um estudo a respeito da percepção visual dos alunos sobre as construções gráficas de funções afim conforme a ideia de *ver como* de Wittgenstein (2017) em dois aspectos: *ver como no sentido de elucidar a regra*, onde verificaremos como a regra de construção do gráfico da função do 1º e do 2º grau é aplicada pelo aluno (como ele mostra a regra, percebe o objeto); e o *ver como no sentido de compreender o jogo de linguagem*, o qual é relacionado a visão do aspecto para identificar as semelhanças com outros objetos (gráficos) que os alunos identificam (ou imaginamos que identificariam).

Na busca de compreender como são buscadas estas soluções e aplicabilidades da álgebra, principalmente no que se refere ao ensino de funções, encontramos um suporte na ideia de vivência visual. Podemos defini-la como algo que está inserido na nossa experiência imediata, de modo geral, é a apresentação daquilo que é visto, o que a memória retoma assim que vemos algo que também está relacionado a nossa experiência.

No que se refere a matemática, que é nosso foco de estudo, a experiência que analisaremos é o objeto matemático gráfico, que anteriormente foi visto pelos alunos como gráficos estatísticos. Quando os alunos iniciam o estudo de funções, eles já trazem uma experiência relacionada a gráfico (seja com o estudo de gráfico de setores, de barras, o estudo das coordenadas cartesianas), a qual irá influenciar na percepção visual do gráfico de uma função. Assim, o questionamento norteador é: Como as regras, sob o ponto de vista de Wittgenstein, influenciam na construção dos alunos de gráficos de funções?

Apresentaremos uma discussão sobre a ideia de "seguir regras" proposta por Wittgenstein (2017), mostrando a relevância deste conceito para as práticas em educação matemática. A exposição teórica será feita conforme a perspectiva da filosofia e da linguagem matemática. Mostraremos o argumento sobre seguir regras que aparece na obra Investigações Filosóficas. O texto é construído conforme a interpretação de alguns teóricos que estudaram a obra de Wittgenstein (2017). O texto iniciará mostrando a ideia de vivência visual, descrita por Guerra (2010) e o conceito de seguir regras que aparece na obra Investigações Filosóficas de Wittgenstein (2017). Logo em seguida, comentaremos sobre a importância de seguir regras para a compreensão do conceito de função e finalizaremos com exemplos de construções gráficas de funções afim de modo a esclarecer a importância do conceito apresentado pelo filósofo para o contexto de aprendizagem de funções.

2 | A IDEIA DE VIVÊNCIA VISUAL PRESENTE NA OBRA DE WITTGENSTEIN

Nas Investigações Filosóficas de Wittgenstein (2017), vemos que a ideia de significação considera as condições pragmáticas do uso linguístico, rejeitando a aceitação da realidade do mundo de modo ontológico. Ao invés disso, ele vê a realidade como produto de interpretações linguísticas. Na fala do filósofo, a compreensão das palavras está associada com as práticas onde o emissor enuncia as palavras e o receptor age de acordo com elas.

O significado das palavras é apreendido pela maneira que são usadas, pelo papel que desempenham na atividade linguística em curso e não pela associação de nomes e objetos. As regras são exibidas e regulam a conduta dos indivíduos capazes de aprendê-las, sendo inseridas em jogos de linguagem, a partir de nossa própria língua, que assim enuncia o modo de ser de tais regras e indica as condições necessárias que os sinais e os signos devem obedecer para cumprir suas funções. Outra ideia que é utilizada por Wittgenstein e aparece interligada aos jogos de linguagem e as regras é a de formas de

vida:

> 19. Pode-se facilmente imaginar uma linguagem que consista somente de ordens e informes numa batalha. – Ou uma linguagem que consista somente de perguntas e de uma expressão de afirmação e de negação.22 E de inúmeras outras.23 — E imaginar uma linguagem significa imaginar uma forma de vida.
>
> 23. Mas quantos tipos de sentenças existem? Talvez asserção, pergunta e ordem? – Há inúmeros desses tipos: inúmeros tipos diferentes de emprego de tudo o que chamamos de "sinais", "palavras", "sentenças". E essa multiplicidade não é nada fixa, dada de uma vez por todas; mas novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem, poderíamos dizer, passam a existir, e outros envelhecem e são esquecidos. (Nós podemos ter uma imagem aproximada disso nas mudanças da matemática.) A expressão "jogo de linguagem" deve enfatizar aqui que o falar de uma linguagem é parte de uma atividade ou de uma forma de vida. (WITTGENSTEIN, 2017, p.20 e 26)

Entende-se aqui que Wittgenstein mostra as formas de vida como o entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem, como atividades não linguísticas ligadas aos jogos de linguagem. Nas Investigações Filosóficas, Wittgenstein faz a análise do emprego da palavra "ver" mostrando os usos que podemos fazer desse verbo: no sentido de "vejo isso" e no sentido de "vejo semelhança em". Quando afirmamos "vejo um rosto" descrevemos uma experiência imediata, direta, objetiva. Se dizemos "vejo uma semelhança com outro rosto", uma relação se estabelece, um aspecto se revela, o que o filósofo denomina como formas de comunicação da percepção. O exemplo para ilustrar seu pensamento é do desenho da cabeça lebre-pato.

Figura 1 – Figura Pato - Lebre

Fonte: Wittgenstein (2017)

São percepções diferentes das expressões: ora se vê um pato, ora se vê uma lebre, ou por fim uma cabeça lebre-pato. Nota-se primeiro o aspecto de um animal, depois do outro até se chegar a uma relação entre os dois animais representados num mesmo desenho. Mas o que acontece? O que difere? Segundo Wittgenstein (2017), o que se altera não é o objeto, mas sim o aspecto expresso numa nova percepção. Em ambas as situações (pato ou lebre) temos expressões de uma percepção, da vivência visual:

> Esta vivência visual se insere no contexto da experiência imediata, apresentação (darstellung) daquilo que é visto, que vem à mente quando

> vemos algo e estaria relacionada também com nossa experiência passada. O exemplo esclarece: quando se vê uma figura do cubo, se vê a figura como caixa. Isto significa que se tem uma determinada vivência visual que vai a par, empiricamente, com a interpretação da figura como caixa ou como a visão de uma caixa (GUERRA, 2010, p.32).

Este fenômeno descrito por Guerra (2010) caracteriza-se por perceber a imagem como uma superfície plana e como um espaço tridimensional. Quem procura numa figura outra figura, e a encontra, vê, por isso, de modo novo.

Conforme essa ideia de vivência visual, podemos dizer que sobre funções, em específico seu gráfico, o aluno não apresenta vivência visual anterior, ou mesmo uma técnica, que o permita ter uma revelação do aspecto ou construir uma nova vivência visual sobre gráficos. A questão sobre a qual debruçamos nossas reflexões é como vivências anteriores relacionadas com gráficos de modo geral, como, por exemplo, os gráficos estatísticos podem ou poderiam influenciar na vivência visual que será construída sobre gráficos de funções. Os alunos conseguem distinguir essas diferentes categorias de gráficos? Como as ideias de percepção visual, seguir regras, ver e ver como podem contribuir para a aprendizagem de funções?

Sendo assim, estabelecemos como objetivo de pesquisa a análise da relevância das regras, na perspectiva de Wittgenstein, para a construção de gráficos de funções, entendendo os erros nas construções gráficas dos alunos por meio da identificação de características que eles utilizam ao realizarem estas construções, em qual contexto de aplicações de regras o discente está inserido ao esboçar um gráfico. Para alcançar tal objetivo, pretendemos em específico: descrever de que forma a percepção visual dos alunos influencia na sua aprendizagem dos gráficos de funções; compreender como os aprendizes fazem a distinção entre gráficos de funções; entender como o aspecto wittgensteiniano "seguir regras" pode contribuir para o aprendizado dos gráficos de funções.

3 | O "SEGUIR REGRAS" NA PERSPECTIVA DE WITTGENSTEIN

Nas Investigações Filosóficas, Wittgenstein (2017) analisa a linguagem humana enquanto uso, instituição, prática. As suas considerações sobre seguir regras contém fortes críticas ao mentalismo, que se fundamentam fortemente no Argumento da Linguagem Privada que tem segundo Jourdan (2005) seu cerne na ausência de critérios, por parte do falante, para identificar seus próprios estados mentais, sem já pressupor regras, o que acarreta um colapso entre verdade e semântica, fato este, que segundo a autora também se aplica ao padrão de solução comunitarista: a ausência de critérios por parte da comunidade para identificar um padrão concordante, sem já pressupor regras, o que acarreta novamente um colapso entre verdade e semântica.

Um tópico que é fulcral para o funcionamento da linguagem busca compreender como podemos, a partir de casos particulares, formar noções gerais que atribuem a muitos

casos distintos e potencialmente infinitos. E para discutir essa questão que a noção de “regra” aparece formulada na obra de Wittgenstein (2017).

Esta noção começa embasada na ação de compreender. O ato de compreender para Wittgenstein (2017) seria *compreender regras*. O sentido de uma expressão gerada nesse ato seria o seu uso regular. A linguagem em geral é entendida como algo baseado em regularidades funcionais que tem infinitas aplicações.

A questão central ganha outros moldes e pode ser formulada da seguinte maneira: Se quem aprende uma regra só dispõe de sua formulação e de exemplos finitos, então, como, a partir disto, ela pode determinar um número ilimitado de aplicações corretas da regra? (IF. 186)[1]. Desde muito cedo somos expostos a palavra regra, porque nós temos que seguir regras, tais como regras de comportamento, trânsito, de jogos, entre outras, ou seja, nas mais distintas situações, estamos sujeitos às regras.

Como relatamos no início, o conceito de seguir regras de Wittgenstein (2017) vem com uma abordagem crítica à concepção mentalista da linguagem. Para elucidarmos esse conceito exposto nas investigações, procuraremos analisar detalhadamente os conceitos de regra, de compreensão e o problema da interpretação de regras. Para entendermos os princípios que o filósofo se opõe, citamos a fala de John Locke (1991, P.147) sobre o significado das palavras. Ele afirma:

> As palavras, na sua imediata significação, são sinais sensíveis de suas ideias, para quem as usa. Palavras, em seu significado primário e imediato, nada significam senão as ideias na mente de quem as usa, por mais imperfeita e descuidadamente que estas ideias sejam apreendidas das coisas que elas supostamente representam (LOCKE,1991, p. 147)

Observamos na teoria do conhecimento de Locke (1991) que na sua concepção de linguagem as ideias são imagens criadas na mente do indivíduo, ou seja, o significado estaria sujeito aos processos mentais, demostrando a correlação entre ideias, mente e significado que fundamentam o que se denomina mentalismo. A questão essencial na concepção mentalista é o significado. Conforme esta corrente, a compreensão de uma palavra só possível diante da imagem mental que representa, sendo, neste sentido, entes indissociáveis e restritos ao falante, que se configura em portador único do significado da palavra no momento em que ela é proferida, dando a linguagem um caráter privado.

Wittgenstein (2017), nas Investigações Filosóficas se demonstrou totalmente contrário a este argumento privado da linguagem, tanto que seu esforço nessa obra foi esclarecer que o significado das palavras está no uso delas em determinados contextos. Como um exemplo desta ideia, podemos citar a palavra *hipérbole*, que na gramática da língua portuguesa significa exagero e na geometria significa um tipo de curva. Tal referência nos mostra que não é suficiente para a definição de uma palavra a imagem mental que a mesma produz, sendo necessário também conhecer os possíveis usos dessa palavra.

1 IF: Investigações Filosóficas, p. 186

E são esses usos das palavras em diferentes contextos que formam a base das Investigações filosóficas. Seguir uma regra de uso da palavra é chave da concepção linguística de Wittgenstein (2017), pois são as regras que determinam o que é falar com sentido e de modo correto, determinando padrões linguísticos. A partir da ideia de seguir regras que Wittgenstein refuta a concepção mentalista, porque esta traz complicações ao processo comunicativo. Para o filósofo, as regras linguísticas são externas e necessitam de um acordo entre os envolvidos no processo de significação das palavras. Logo, a comunicação e a compreensão linguística precisam, em tese, de uma aprovação pública das palavras e suas regras de utilização, caso contrário, ambas não existiriam, pois, cada indivíduo daria um significado particular as palavras.

Wittgenstein (2017) inverteu a concepção mentalista da linguagem ao colocar a linguagem como uso, prática (tal como andar, nadar, etc.) e instituição. O interesse expresso nas investigações filosóficas era voltado para as regras gramaticais, as quais estabeleciam o critério para o discurso significativo, não se tratando de uma gramática particular de uma língua, porém de uma gramática da palavra, comum a todas as línguas. Os critérios para compreender os significados das palavras são públicos e externos. Para esclarecermos esta afirmação, expomos uma passagem das investigações filosóficas:

> § 143 Consideremos agora este tipo de jogo de linguagem: sob a ordem de A, B deve anotar uma série de sinais segundo uma determinada lei de formação.
>
> A primeira dessas séries deve ser a dos números naturais no sistema decimal. – Como ele aprende a compreender esse sistema? Em primeiro lugar, séries de números são ditadas, e ele é exortado a tomar nota delas. (Não fique chocado com a expressão “séries de números”, ela não é empregada aqui de modo incorreto!) E já temos aqui uma reação normal e uma anormal do aprendiz. – Primeiro, talvez, nós conduzimos o aprendiz pela mão a tomar nota da série de 0 a 9; mas depois a *possibilidade de comunicação* vai depender de que ele continue a escrever por si mesmo. – E aqui poderíamos pensar, por exemplo, que ele, na realidade, copia os algarismos por si mesmo, não segundo a série, mas, irregularmente, primeiro este, depois aquele. E então ali deixa de haver comunicação. – Ou pode ser que ele cometa ‘*erro*’ de continuidade na série. – A diferença entre este e o primeiro caso é, naturalmente, de frequência. – Ou: ele comete um erro *sistemático*, ele sempre toma nota, por exemplo, de apenas um de cada dois números; ou ele copia a série 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... assim: 1, 0, 3, 2, 5, 4, ... Aqui seremos quase que tentados a dizer que ele nos compreendeu *equivocadamente* Observe, porém: não há uma fronteira precisa entre um erro de irregularidade ou de sistematicidade. Isto é, entre aquele que você estaria inclinado a denominar de “irregularidade” e aquele que chamaria de “erro sistemático”. Pode-se, talvez, desacostumá-lo do erro sistemático (como de um mau hábito). Ou aceita-se o seu modo de copiar, e tenta-se ensinar para ele o modo normal como uma subespécie, uma variação, do seu. – E aqui também pode acabar a capacidade de aprendizagem do nosso aluno. (WITTGENSTEIN, 2017, p.104 - 105)

Nesta passagem das Investigações Filosóficas, observamos a imagem de um determinado jogo de linguagem (contexto onde os critérios de determinação dos significados

das palavras emergem). O professor tem o objetivo de ensinar uma série numérica para um aluno. Este inicia a série e pede que o aluno prossiga sem o seu auxílio. Quando o aluno termina a tarefa, o docente verifica que o mesmo não deu continuidade a série conforme a regra ensinada. Dando continuidade ao exemplo, Wittgenstein (2017) retoma:

> §185 Retornemos agora para o nosso exemplo (143). O aluno domina agora – julgado segundo os critérios habituais – a série dos números naturais. Nós lhe ensinamos, então, a escrever também uma outra série de números cardinais, e o levamos até o ponto em que ele, por exemplo, após uma ordem da forma "+n", escreve séries da forma 0, n, 2n, 3n etc.; portanto, com a ordem "+1", a série dos números naturais. – Nós lhe teríamos aplicado exercícios e testado a sua compreensão da numeração até 1000. Nós deixamos agora o aluno dar prosseguimento a uma série (talvez "+2") para além de 1000, – então, ele escreve: 1000, 1004, 1008, 1012.
>
> Nós lhe dizemos: "Olhe o que você fez!" – Ele não nos entende. Nós dizemos: "Você deveria ter adicionado *dois*; veja como você começou a série!" – Ele responde: "Sim! Não está certo? Eu pensei que *deveria* fazer assim." — Ou suponha que ele, apontando para a série, dissesse: "Mas eu dei prosseguimento da mesma forma!" – De nada nos serviria dizer "Mas você não vê, então, que ...?" – e repetirmos para ele as velhas explicações e exemplos. – Poderíamos num caso como esse, talvez, dizer: esta pessoa, por natureza, compreende aquela ordem a partir da nossa explicação, do mesmo modo que nós a ordem: "Adicione sempre 2 até 1000, até 2000, 4, até 3000, 6 etc."
>
> Esse caso se assemelha com o de uma pessoa que reage por natureza, ao gesto de apontar com o dedo, olhando na direção da ponta do dedo para o pulso, em vez de olhar na direção da ponta do dedo. (WITTGENSTEIN, 2017, p.134 – 136)

Observamos que Wittgenstein (2017) destaca que o aluno errou por interpretar a regra de modo privado ao enfatizar a sua fala "eu pensei que *deveria* fazer assim" ao invés de olhar para a regra em si e tal situação fica bastante elucidada quando compara com o exemplo do olhar o gesto de apontar com o dedo. Depreende-se disto que a compreensão não é uma explicação de um processo mental, e sim uma prática. A esse respeito Dummett (1959, p.331) afirma: "Mas suponha o treinamento não foi dado apenas pelo exemplo, mas fez uso também de uma formulação explícita da regra para formar a partir de um número o seu sucessor" Além da formulação explícita da regra que Dummett (1959) se refere temos que considerar que o sistema não pode consistir no fato de se continuar a série até este ou aquele número; isto é, apenas a aplicação da compreensão. A própria compreensão é um estado, de onde nasce o emprego correto. A aplicação permanece um critério da compreensão.

Imaginemos a seguinte situação: é ensinado ao indivíduo a resolução de equações do 2ª grau por meio da fórmula resolutiva. Com a aprendizagem, ele passa a saber as etapas básicas para a resolução utilizando-se este método: a identificação dos coeficientes da equação, o cálculo do discriminante e a fórmula resolutiva para extração das raízes da

equação. Feito isso, tal indivíduo é submetido a um teste prático, em que verificará a sua compreensão, se ele aprendeu e sabe de fato resolver uma equação quadrática por meio deste método. É neste momento que veremos se ele domina a técnica ensinada.

O critério de compreensão de uma regra é a sua aplicação, como Wittgenstein (2017) afirma no § 146 das Investigações. Da mesma forma que a gramática da palavra "saber" goza de estrito parentesco com a gramática das palavras "poder" e "ser capaz" e todas estas com a palavra "compreender". Ao contrário no § 187, o filósofo deixa evidente que a gramática da palavra "saber" não se relaciona com "ter em mente". A compreensão de uma regra linguística e a sua correta aplicação obedecem a critérios públicos e externos que podem ser aprendidos e praticados.

Por exemplo, seguindo o pressuposto de Wittgenstein (2017), para sabermos como um indivíduo compreende as regras linguísticas da palavra vermelho, basta observarmos como ele a usa. Se ao apontar para uma cadeira azul e disser que é vermelha, então concluímos que o mesmo não compreende as regras linguísticas da palavra. O indivíduo poderia justificar dizendo que a ideia que ele "tem em mente" da cor vermelha remete a cor "azul" da cadeira, mas nós podemos refutar a ideia ao advertir que o critério de compreensão da palavra vermelho não é utilizado desta forma, que o que ele "tem em mente" não podemos levar em consideração, pois não é o que significa a palavra vermelho. A compreensão de uma palavra e de suas regras deve sempre remeter ao uso que dela fazemos, correspondendo necessariamente a sua correta aplicação em seu contexto de uso. É no contexto que a palavra ganha vida e funcionalidade, constituindo-se em uma prática.

4 | O "SEGUIR REGRAS" COMO CONDIÇÃO DE SENTIDO PARA SER GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO AFIM

Dessas primeiras reflexões sobre vivência visual e seguir regras, levantamos as nossas primeiras hipóteses: quando o aluno vê o gráfico de uma função, ele não a vê como um gráfico de uma função, pois ainda não tem o conceito de função. Quando é que ocorre no aluno essa mudança de aspecto, de forma que ele passe a enxergar o gráfico como sendo de uma função?

Como essa mudança ocorre em nós? Por exemplo, vamos considerar o momento que compreendemos uma regra aritmética. Uma série numérica que inicia primeiro com o 2, depois 4, depois 6, depois 8. O que me faz "pegar" essa regra (de adicionar 2) de modo que eu possa continuar confiante: depois 10, depois 12, depois 14, depois 16. O que acontece quando tenho essa visão? Os números não mudaram, porém, agora eu os vejo de modo diferente, como uma série numérica infinita que eu posso continuar sozinha.

Esta é uma das questões que interessava particularmente Wittgenstein, o que acontece no momento em que ocorre a "mudança" de enxergar apenas uma série

de números como uma manifestação de uma regra. O “ver-como” é o que conecta a percepção, o entender o significado e o seguir regras. Sobre os conceitos de “ver” e “ver-como”, Silva e Silveira (2014, p.20) afirmam que Wittgenstein não buscava apenas elucidar o uso dos conceitos mentais na psicologia, mas também esclarecer confusões conceituais na matemática. Os autores apontam para a relevância do ver-como em Wittgenstein para as discussões a respeito da visualização no ensino da matemática. Tratam de situações como a seguir:

> Por que o aluno não vê 8 como 2^3, quando estuda equações exponenciais, mesmo tendo estudado a potenciação anteriormente? Ou por que os aprendizes muitas vezes não percebem que, ao traçar a diagonal de um retângulo, determinamos dois triângulos retângulos? (SILVA E SILVEIRA, 2014, P.20)

Baseados nas questões discutidas pelos autores, levantamos a seguinte situação sobre a visualização no ensino da matemática: Por que o aluno, por exemplo, não visualiza o gráfico da função a seguir como sendo da função f(x) = 2x + 3?

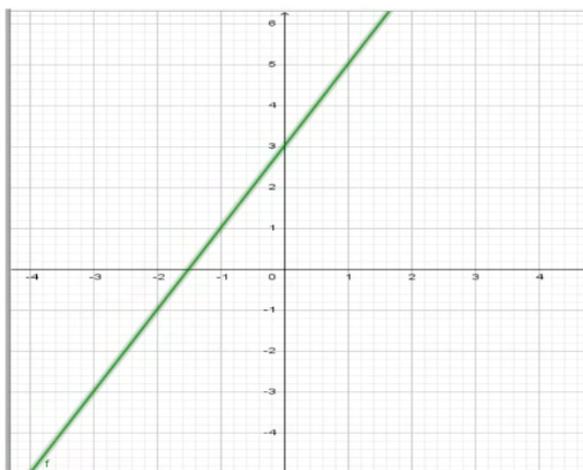



Imagem 2 - Gráfico da Função f(x) = 2x + 3

Fonte: Elaborada pela autora.

Tomamos como base os pensamentos de Silva e Silveira (2014) no que se refere a educação matemática. O ver-como de Wittgenstein não será visto aqui como um processo mental, mas como um domínio de técnicas, as quais dependem de hábito e educação, pois só assim podemos ter as ideias do filósofo como um aporte para elucidar algumas questões no aprendizado da matemática, e em específico, no aprendizado de funções.

Para Wittgenstein (2017), esse ver-como que nos faz ver algo ora de uma forma e ora de outra maneira, não é uma ação que se deve a processos mentais e sim a um domínio de técnicas que se fundamentam no uso de regras. Segundo Wittgenstein (2008,

apud SILVA & SILVEIRA, 2014, p.223), o caso do significado vivenciado tem afinidade com o da visão de uma figura como isto ou aquilo, ou seja, está próximo do conceito de vivência da significação de uma palavra. Dessa forma, percebemos que notar os aspectos de uma figura depende do domínio de técnicas.

Sobre essas regras ou técnicas, Wittgenstein (2017) levanta a problemática que surge, de acordo com o platonismo[2], na separação entre a regra e a sua aplicação. Quando se dá uma regra, esta pode ou não ser aplicada, o que impõe o seguinte questionamento: como transpor o “fosso” entre a ordem e a execução?

Hebeche (2016) comenta que tais questionamentos advêm de outros anteriores: “Como agir de acordo com uma regra? Como a regra determina o que concorda com ela? Como determinar este acordo sem que haja um processo mental envolvido e sem que ocorra a separação entre regra e aplicação? Esta separação poderia ser superada pela reflexão? Não faz parte da aprendizagem do refletir se uma regra está sendo seguida corretamente ou não? ”. Conclui-se que o abismo surge da ilusão a respeito do que é seguir uma regra.

Wittgenstein (2017) esclarece que o obstáculo está em saber se uma regra foi compreendida ou não, e quais são os critérios para determinar se uma regra está sendo seguida corretamente. A compreensão de uma regra não é desvinculada de sua execução, a qual é uma instituição de sentido que se dá por consenso ou por aceitação de partes. Da mesma forma, os critérios para se determinar que uma regra está sendo seguida estão na própria regra. Wittgenstein pretende desfazer duas ilusões: a do mentalismo[3] e a do platonismo. Não se segue regra privadamente e nem se explica externamente. Assegura que a compreensão jamais é um processo mental e que compreender uma linguagem é dominar uma técnica.

Os contextos em que as regras linguísticas são aplicadas determinam o sentido que elas carregam. Interpretar a linguagem como possuidora de sentido é entender que o aprendizado desta só ocorre em sociedade (convívio social), onde há de fato sua aplicação. Quando se traduz uma sentença para uma equação, por exemplo, a referência deixa de ser o foco, dando lugar ao sentindo, ou seja, o que se entende quando as palavras são enunciadas. Não se pode entender o sentido isoladamente, deve se colocar o contexto de pensamento.

O fato de um objeto ser visto de diferentes maneiras não é uma característica do objeto e sim dos jogos de linguagem. Por exemplo, quando eu represento uma função de diferentes maneiras (gráfica, algébrica, tabelar, verbal), eu aplico em cada uma delas um

2 Segundo a corrente filosófica do Platonismo, no campo da Teoria das Ideias, existem dois mundos, ou seja, a realidade está dividida em duas partes: o mundo sensível (mundo material), mediado pelas formas autônomas que encontramos na natureza, percebido pelos cinco sentidos e o mundo das ideias (realidade inteligível) denominado de “mundo ideal”, ou seja, aproxima-se da ideia de perfeição de algo

3 Consideraremos mentalismo conforme a literatura behaviorista que o define como qualquer enfoque psicológico que considere o comportamento como resultado de processos e/ou agentes internos e/ou de outra natureza ou substância distinta daquela da conduta a ser explicada.

jogo. Em relação ao significado de uma palavra a resposta pode ser empírica ou quando se mostra o emprego usual dela (de essência), buscamos o critério de uso correto. Ao falamos em função, não tentamos dar uma resposta empírica e sim uma resposta de essência, ou seja, procuramos mostrar como aplicar o conceito de função. O conceito existe para que possamos operar com ele. Se trouxermos isso para o caso das funções: o aluno entende o conceito de função quando ele aplica as diferentes representações do conceito. Hebeche (2016), ao analisar o trabalho de Wittgenstein, explica que as palavras ao perderem seus usos, tornam-se carentes de significado. Nas representações das funções, se o aluno não dá um uso a elas, estas ficam sem significado.

Para a construção do estudo, a proposta metodológica adotada se enquadra na corrente conhecida como filosofia analítica, que tem como interesse a investigação acerca das formas e dos modos de funcionamento da linguagem, tal como uma prática de esclarecimento conceitual, tendo por base a atividade epistêmica que, numa perspectiva Wittgensteiniana, envolve os processos de duvidar, acreditar, estar perto, opinar, conhecer, etc. e a terapia das confusões geradas pela interpretação unilateral da significação dos conceitos relativos a essa interpretação segundo o modelo referencial. Temos como base conceitual a ideia de seguir regras presente na obra de Wittgenstein (2017) de modo a proporcionar uma análise a respeito das construções gráficas elaboradas pelos alunos (quais regras os alunos seguem na elaboração de um gráfico?)

O cenário da pesquisa foi uma escola pública localizada no município de Ananindeua, estado do Pará, onde participaram alunos que estavam cursando o 9º ano do ensino fundamental. O instrumento de coleta de dados foi o questionário sobre gráficos de funções afim que nos permitiram uma análise baseada no constructo de uma interpretação das construções gráficas na perspectiva de seguir regras de Wittgenstein (2017).

Optamos por utilizar como instrumento para levantamento de dados o questionário, composto por questões que contemplam a construção dos gráficos de funções afim. Os questionários tiveram o seguinte objetivo: coletar as representações gráficas das funções feitas pelos alunos. Com base nesses dados, procuramos analisar a percepção visual que os discentes têm em relação ao gráfico (representação geométrica), de maneira que possamos identificar pontos que tragam reflexões sobre o ensino de funções afim e quadrática.

Neste estudo, partirmos da proposta de compreender a percepção visual que os alunos têm sobre gráfico de função, por meio da descrição dessa percepção visual, que embasada no aspecto wittgensteiniano do “ver-como” nos possibilitou identificar pontos que podem contribuir para o aprendizado da representação gráfica. Buscamos fundamentação teórica na história do desenvolvimento da álgebra, bem como nas pesquisas em educação que envolvem este tema para entendermos o significado ou significados que as funções assumem no ensino da matemática. Na tabela a seguir, apresentamos a 1ª lista de exercícios.

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS
1 – Dadas as funções de R em R, faça um esboço do gráfico: A) $f(x) = 2x + 3$ B) $f(x) = -3x + 4$ C) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 6$ D) $f(x) = 3x - 1$ E) $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$

Tabela 1 - 1ª Lista de Exercícios

Fonte: elaborada pela autora

4.1 Primeira lista de exercícios: a representação gráfica de funções Afim

Na primeira lista de exercícios, foi pedida a representação gráfica de funções afim. A proposta era analisar quais regras os alunos utilizariam para construir os gráficos. Percebemos nas representações gráficas dos alunos que a norma matemática relacionada aos postulados de incidência *"dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém"* e *"em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos"* são elementos essenciais na representação gráfica, ou seja, para construir uma reta, é fundamental que se determine pelo menos dois pontos. Numa primeira perspectiva, para os alunos foi tão relevante esta regra que a aplicaram sem considerar o jogo de linguagem que estava em questão. Observou-se que a regra foi mantida em jogos de linguagem distintos. O aluno que identificamos como A1 buscou fazer a representação gráfica da função real f(x) = 2x + 3 por meio da determinação de dois pontos. Observa-se que utilizou o sistema tabular para auxiliar nesta determinação e representou os pontos de acordo com as coordenadas cartesianas.

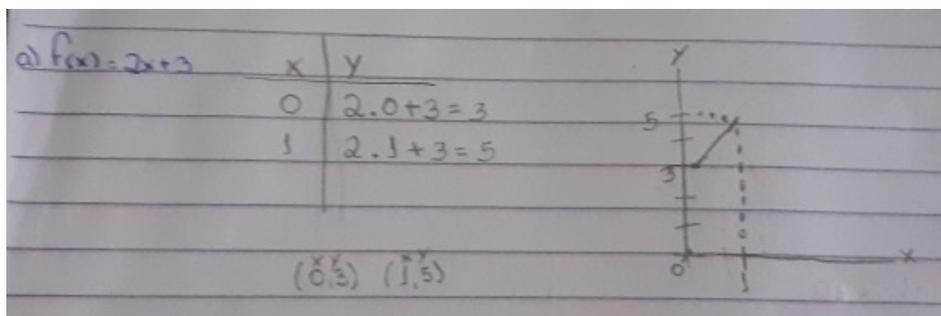



Figura 3 – Esboço do gráfico do aluno A1

Fonte: Registro da autora

O aluno utilizou a mesma regra para fazer a representação gráfica da função real f(x) = -3x + 4, contudo não obteve o resultado correto. Observa-se que o aluno teve problemas de ordem operacional ao determinar o segundo ponto, o que poderia ser corrigido caso utilizasse a regra de crescimento e decrescimento da função relacionada ao coeficiente a da função.

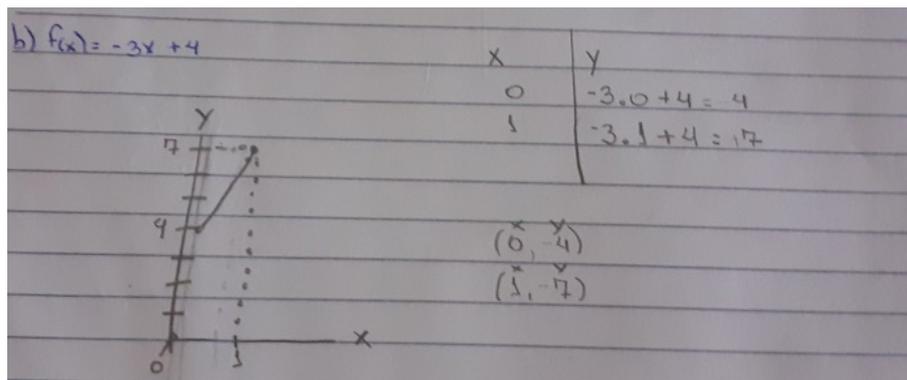



Figura 4 – Esboço do segundo gráfico do aluno A1

Fonte: Registro da autora

Ao considerar apenas a determinação de dois pontos como regra para construção gráfica e não perceber que o uso que se faz dessa regra muda conforme o jogo de linguagem (por exemplo, quando é uma função crescente ou decrescente) prejudica a percepção geométrica que o aluno produz da função e a ação de aprender que na fala de Gottschalk (2004, p.87) significa "ser capaz de ver de outra maneira, sem que essa outra maneira seja uma "variação" de uma hipótese inicial do aluno". Não conseguir fazer o uso da regra em diferentes jogos de linguagem nos mostra que a representação do gráfico de uma função do 1° grau, o "desenho da reta" é um símbolo vazio para o aluno, caso ele não conheça as regras de sua construção e emprego. Na fala de Gottschalk (2004, p.88) "imagens, palavras e modos de operar com elas são apresentados ao aluno, lembrando que tanto uma imagem como uma palavra, por si só, são símbolos vazios se não forem acompanhados por alguma técnica que permita seu emprego"

A autora afirma que o aluno sendo apresentado a um jogo de linguagem, tenderá a seguir as mesmas regras, mesmo em um novo jogo, fato este que observamos nos gráficos elaborados por A1. Contudo, a autora reforça a necessidade docente de esclarecer este novo uso da regra, novo sentido, expandido a gramática de seus usos. Para que a representação geométrica da função deixe de ser um símbolo vazio para o aluno é necessário que sejam estabelecidas relações internas entre os conceitos envolvidos. Segundo Gottschalk (2004,p.91):

> Recorre-se a determinados processos e atividades que cumprem uma função paradigmática: é assim que operamos. Em outras palavras, por meio de exemplos, predispõe-se o aluno a ver como. O professor apresenta-lhe outros pontos de vista, outras formas de ver, com o objetivo de persuadi-lo a aceitá-los (GOTTSCHALK, 2004, p. 91, grifo nosso)

Dessa forma, o professor tem que mostrar como se constrói gráficos de funções do 1º grau "mostrar as regras" para predispor o aluno a ver a reta em um eixo cartesiano como o gráfico de uma função afim.

No caso do aluno que identificamos por A2, observamos que a regra da construção gráfica foi substituída em um jogo de linguagem distinto. Na sequência didática que foi trabalhada em sala de aula foi apresentada primeiro a função polinomial do primeiro grau com a sua representação gráfica e depois a função polinomial do segundo grau. O aluno ao ter contato com as regras de construção da parábola, tentou aplicá-las na construção da função afim, dando a entender que aquelas regras agora eram as válidas, em detrimento das anteriores. Identificamos como elementos fixos da regra de construção gráfica o processo de encontrar as raízes da função para a determinação das coordenadas do eixo x e a determinação das coordenadas do vértice da parábola.

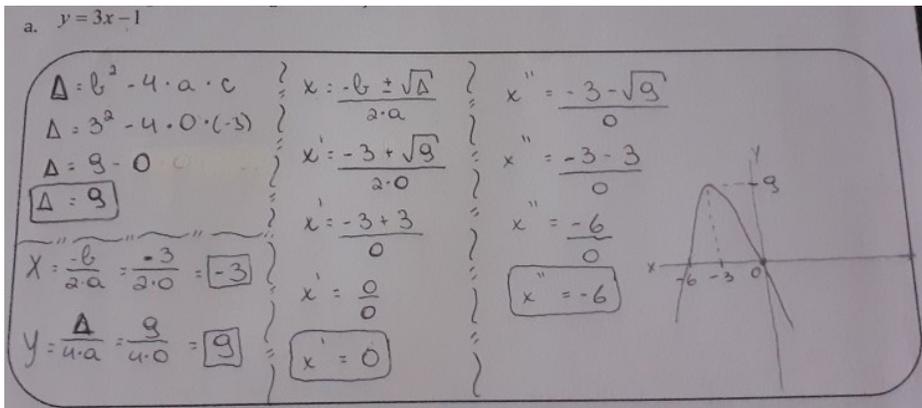



Figura 5 – Esboço do gráfico do aluno A2

Fonte: Registro da autora

A substituição da regra em jogos de linguagem distintos reforça aqui as considerações que foram feitas anteriormente. A primeira delas, a não atenção as variáveis visuais: o aluno compreende a relevância dos coeficientes a e b (na função afim) e a, b,c (na função quadrática) na aplicação da regra, mas não compreendem o significado que estes assumem na representação gráfica.

Tomando as reflexões de Wittgenstein (2017), percebe-se que a regra ou o método de construção acaba por se tornar insuficiente, devido sua aplicação não se constituir

em uma explicação do que é o gráfico de uma função. A aplicação da regra depende do uso que se faz dela, pois é este uso em diferentes contextos que produz o significado. A regra por si só justifica a aplicabilidade e o significado, além de confundir-se com eles, só interessando quando coincide com sua aplicação. Para Wittgenstein (2017), uma regra não atua a distância. A substituição da regra nos mostrou que o aluno efetua a aplicação sem se preocupar com o contexto. O tratamento dado pelos alunos para as regras é marcado por uma substituição. O aluno aprendeu primeiro a regra de construção gráfica da função afim, depois aprendeu a regra de construção gráfica da função quadrática e depois de aprender a última ele faz a substituição, a considerando agora como a regra válida.

Nas vertentes do ver e ver-como, a imagem que o aluno faz do gráfico (refiro-me aqui a imagem no sentido de reta ou parábola) é como já tínhamos analisado anteriormente, um símbolo vazio para ele. Ao não considerarem o sentido da reta ou a direção da concavidade da parábola, fica evidente que o mais importante não são estes objetos (e consequentemente nem as relações entre variáveis) e sim apenas a determinação de pontos no eixo cartesiano.

5 I ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Com vimos, os problemas filosóficos, segundo a perspectiva de Wittgenstein (2017), são ilusões gramaticais causadas pela linguagem, mais precisamente na compreensão e aplicação das regras, marcada pelo obstáculo que encontramos ao determinar os critérios para dizer que uma regra está sendo seguida ou não. Para o filósofo, tais critérios estão na própria regra, uma vez que se configura como ente indissociável de sua aplicação, pois não é uma ação isolada, necessitando do consenso e aceitação das partes sociais que compõem um jogo de linguagem que se fundamenta nas formas de vida de cada sociedade.

A função polinomial, na perspectiva do fundamento da filosofia de Wittgenstein (2017) tem um significado construído em seu emprego em diferentes contextos. Alinhando com os estudos em história da matemática, a evolução conceitual poderia ser um processo em que novos jogos de linguagem são constituídos e outros ficam antigos e são esquecidos.

A atividade que define a relação entre variáveis é a regra que constitui o jogo de linguagem “função”, onde cada matemático ao longo da história foi aprendendo a “jogar” e construir um novo jogo, explorando as regras do conceito de função, ou seja, seus objetos intrateóricos que são carregados de simbolismos e são de cunho normativo, resultantes da convenção humana, onde o uso lhe ensina o significado. Na história da matemática, os usos das regras nos diferentes momentos históricos nos mostram que elas são convenções humanas. Cada definição de função que apareceu era a expressão de um novo uso do seu conceito. Dessa forma, justificamos uma possibilidade de um estudo de caráter filosófico relacionado a história da matemática, pautado nas diferentes aplicações do conceito (como relação entre quantidades variáveis, como expressão analítica, como relação entre

conjuntos e como transformação) podem esclarecer o significado da palavra função. São as diferentes aplicações (usos da regra) que fazem compreender o que é função, de modo a treinar o olhar no sentido de perceber a função em qualquer situação.

Sobre a aquisição da linguagem matemática expressa na percepção visual do aluno observa-se a necessidade de saber aplicar a regra no jogo de linguagem estabelecido, e entender as relações conceituais de significação existentes nas situações de usos de uma regra. O aluno deve entender o contexto que envolve o objeto matemático, que no caso mostrado foi a função, para poder elencar o que é essencial na construção de um gráfico. Em uma primeira análise, vimos que a principal regra seguida pelo aluno está relacionada aos postulados de incidência da reta, a determinação de raízes de uma função foi tão presente nas representações dos gráficos das funções, que estes podem ser considerados como elementos essenciais para os alunos, a tal ponto de aparecerem em qualquer situação, mesmo que o jogo de linguagem mude. Compreendemos que o entendimento dos objetos e conceitos inicia-se no momento que o aluno é capaz de mobilizar e de coordenar dois jogos de linguagem (algébrico e gráfico) para um mesmo objeto, mostrando assim o funcionamento do pensamento matemático.

REFERÊNCIAS

DUMMETT, M. Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics. **The Philosophical Review**, Vol. 68, No. 3 (Jul., 1959), pp. 324-348. Duke University.URL: http://www.jstor.org/stable/2182566. Acesso em: 06/02/2021.

FOSSA, J. **O ensino do conceito de variável**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2012.

GOTTSCAHLK, Cristiane. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência,** Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, pp. 305 – 334, jul. – dez. 2004.

GUERRA, C.B. A Percepção visual em Wittgenstein e a Teoria dos Aspectos. **Linc em Revista**, v. 6 n. 2 (2010): Linguagem, informação e novas dinâmicas sociais contemporâneas.

HEBECHE,L. **A filosofia sub specie grammaticae**: Curso sobre Wittgenstein. Editora da UFSC, 2016.

JOURDAN, C. “Seguir Regras” em Wittgenstein: críticas ao mentalismo e ao comunitarismo. **Abstracta 1: 2**, pp. 207-220, 2005.

LOCKE, J. (1690). “Ensaio acerca do entendimento humano”. Trad.Anoar Aiex. In: _______. **Ensaio acerca do entendimento humano. Segundo tratado sobre o governo**. Trad. De Anoar Aiex e E.Jacy Monteiro. 5ª Ed. São Paulo: Nova Cultural, 1991. (Coleção “Os Pensadores”)

SILVA, P.V; SILVEIRA, M.R.A. O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem da Matemática: um ensaio. **BoEM**, Joinville, v.2. n.3, p. 17-34, ago./dez. 2014.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações filosóficas**. São Paulo: Editora da Unicamp – Trad. João José R. L. de Almeida, 2017.

CAPÍTULO 17

ABORDAGENS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: OS DESAFIOS DA SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Data de aceite: 02/05/2022

Dionísio Burak
Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação da UEPG e Pesquisador Sênior da Fundação
Universidade Estadual de Ponta Grossa, UEPG Universidade Estadual do Centro-Oeste, UNICENTRO
Araucária

Laynara dos Reis Santos Zontini
Instituto Federal do Paraná, IFPR
Irati

RESUMO: Este texto analisa o processo de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica e nortou as discussões da Mesa Temática intitulada: *O uso de diferentes abordagens para o ensino de matemática e os desafios da sala de aula*, realizada no Encontro Paranaense de Educaçao Matemática (EPREM) em 2017. Traz considerações gerais sobre o processo de ensino e as remete aos modelos de racionalidade presentes na formação dos professores, cujas implicações causam desfavorecimento para a aprendizagem dos estudantes. Em relação ao ensino de Matemática, apresenta, comenta e reflete sobre algumas formas de abordagem do processo, com base nas teorias de aprendizagem aplicadas nas escolas da Educação Básica.
PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Matemática. Abordagem do processo. Educação Básica.

APPROACHES IN MATHEMATICS TEACHING: THE CHALLENGES OF THE CLASSROOM IN BASIC EDUCATION

ABSTRACT: This text analyzes the teaching and learning process of Mathematics in Basic Education and guided the discussions of the Thematic Table entitled: The use of different approaches for teaching mathematics and the challenges of the classroom, held at the Meeting of Paraná in Mathematics Education (EPREM)) in 2017. It brings general considerations about the teaching process and refers them to the models of rationality present in teacher training, whose implications cause disadvantages for student learning. In relation to the teaching of Mathematics, it presents, comments and reflects on some ways of approaching the process, based on the theories of learning applied in Basic Education schools**.**
KEYWORDS: Teaching Mathematics. Process approach. Basic education.

INTRODUÇÃO

A forma com que se ensina a Matemática nas escolas, no momento atual, convida a refletir em relação à temática. O modo como são conduzidas as aulas, na maior parte das situações, promove apenas informações, verbosidades, uma única forma de olhar o conteúdo. O modelo pelo qual se foi orientado na formação e produziu professores, não sem raras exceções, dirige à mesma forma de conduzir as práticas em sala de aula. Assim, as disciplinas

escolares são trabalhadas de forma isolada, sem relações com outras, Português pelo Português, História pela História e dentre essas a Matemática pela Matemática, com suas regras, definições e métodos específicos de concebê-las. De modo geral, pensa-se pontualmente, em contraste com o pensamento global.

A maneira de se ensinar a Matemática ainda continua centrada no livro, que expõe, como referencial sobre o assunto, geralmente, um pequeno texto em que apresenta um resumo da teoria, conduzindo a alguns exemplos de exercícios que são resolvidos pelo professor e uma generosa lista de exercícios proposto, contendo os exercícios em escala gradativa de dificuldade para ser resolvida pelos estudantes.

Este padrão, norte na formação inicial, denomina-se modelo da racionalidade técnica, nascido com a revolução científica do século XVI e completada no século XIX, com as ciências humanas e sociais.

Deste modo, muitas vezes, há limitação aos resultados de exames nacionais do tipo Pisa, ENEM, Prova Brasil para apontar que os estudantes aprendem pouco. Isso de alguma forma está em conformidade com a racionalidade técnica. No entanto, o pior e mais constrangedor é valer-se deste fato para encobrir a incapacidade de realizar melhor o ensino, isto sim a causa primeira e a mais contundente responsável direta pelo fracasso dos estudantes.

Dessa forma, visando trazer à mesa temática do Encontro Paranaense de Educação Matemática (ENEM), realizado em Cascavel em 2017, elementos para a discussão, tratamos das formas de abordagens do processo de ensino e aprendizagem sob dois olhares: o das formas de entender o processo de ensino e aprendizagem e os possíveis modos de trabalhar os conteúdos, sob o ponto de vista das teorias de aprendizagem e tendências. Embora, esses dois olhares estejam diretamente imbricados são utilizados para conduzir o texto.

Inicialmente sob o foco das teorias de aprendizagem, ainda que de forma breve, discorremos sobre as teorias principais que permeiam as práticas na maioria das escolas da Educação Básica. É um pequeno resumo de alguns movimentos da psicologia da educação e suas influências no trabalho escolar com base nos princípios behavioristas, construtivista- interacionista e sociointeracionista. Em cada uma dessas tendências, descrevemos as ideias de seus principais representantes. Também são citados exemplos de como tratar alguns conteúdos, na posição assumida, para o ensino e aprendizagem da Matemática no âmbito da Educação Básica.

Os estudos de Maria da Graça Nicoletti Mizukami (1986) e Santos (2005) constituem o referencial teórico orientador seguido neste texto.

Para Mizukami (1986), diferentes posicionamentos pessoais ensejam derivar vários arranjos de situações de ensino e aprendizagem e diferentes ações educativas em sala de aula, partindo-se do pressuposto de que a ação educativa, exercida por professores em situações planejadas que envolvem o ensino e a aprendizagem, é sempre

intencional. Além disso, para a autora (MIZUKAMI, 1986. p.4) “subjacente a esta ação, estaria presente – implícita ou explicitamente, de forma articulada ou não – um referencial teórico que abarcasse conceitos de homem, mundo, sociedade, cultura e conhecimento.” Complementa, ainda, observando que, no campo de um mesmo referencial, é possível haver múltiplos enfoques, tendo em comum apenas os diferentes primados, ou seja o que é mais importante entre outros: ora do objeto, ora do sujeito, ora da interação de ambos.

Desse modo algumas correntes de pensamento apresentam claro referencial filosófico e psicológico, ao passo que outras são intuitivas ou fundamentadas na prática, ou na imitação de modelos. Para não ser tratada de forma simplista e reducionista, há que ser considerada a complexidade que envolve a realidade educacional. No propósito de contribuir para este esclarecimento, o texto analisa a relação entre as abordagens de ensino e aprendizagem, conhecidos hoje, dos pontos de vista educacionais e cognitivos e as possibilidades, que cada uma delas oferece para tornar a prática educativa significativa para os estudantes.

Os fundamentos do processo de ensino e aprendizagem objeto desta exposição são:

1. Tradicional
2. Comportamentalista
3. Humanista
4. Cognitivista
5. Sociocultural

1. O pensamento tradicional

A principal característica da teoria tradicional é a transmissão de conhecimentos acumulados pela humanidade. A tarefa cabe ao professor, independentemente dos interesses dos estudantes em relação aos conteúdos. Para Mizukami (1986, p.17), essa missão do professor é considerada “[...] catequética e unificadora da escola, envolve programas rígidos e coercitivos e exames seletivos”. Nessa perspectiva o ensino tradicional tem como primado o objeto, o conhecimento, e o estudante é um simples depositário.

O Quadro 1 apresenta características da abordagem tradicional, em relação à escola, ao aluno, ao professor e ao ensino e aprendizagem.

Elementos relevantes na abordagem tradicional	
A escola	Lugar ideal para a realização da educação. Organizada com funções claramente definidas. Normas disciplinares rígidas. Prepara os indivíduos para a sociedade.
O aluno	É um ser "passivo" que deve assimilar os conteúdos transmitidos pelo professor. Deve dominar o conteúdo cultural universal transmitido pela escola.
O professor	É o transmissor dos conteúdos aos alunos. Predomina como autoridade.
Ensino e aprendizagem	Os objetivos educacionais obedecem à seqüência lógica dos conteúdos. Os conteúdos são baseados em documentos legais, selecionados a partir da cultura universal acumulada. Predominam aulas expositivas, com exercícios de fixação, leituras-cópia.

Quadro 1 – Abordagem tradicional

Fonte: Santos (2005, p.22).

Uma aula de Matemática nesta concepção, prima pela centralidade do professor que é a autoridade absoluta. Os assuntos seguem o ritual expositivo de proposição do conteúdo, seguido de definição, alguns exemplos e uma lista de exercícios a ser resolvida pelo estudante, com o propósito de fixação do conteúdo transmitido.

2. O pensamento comportamentalista

Para Mizukami (1986, p.18), "[...] esta abordagem se caracteriza pelo primado do objeto (empirismo). Conhecimento é uma 'descoberta' e é nova para o indivíduo que a faz. O que foi descoberto já se encontrava presente na realidade exterior." Considera-se o organismo sujeito às contingências do meio e o conhecimento é uma cópia do dado no mundo exterior. Para Mizukami, os comportamentalistas behavioristas, instrumentalistas e os positivistas lógicos consideram a experimentação ou a experiência como base do conhecimento, isto é, o conhecimento é o resultado direto da experiência.

O Quadro 2 apresenta características da abordagem comportamentalista envolvendo: escola, aluno, professor e o ensino e aprendizagem.

Elementos relevantes na abordagem comportamentalista

A escola	Agência educacional. Modelo empresarial aplicado à escola. Divisão entre planejamento (quem planeja) e execução (quem executa). No limite, a sociedade poderia existir sem escola. Uso da teleducação. Ensino à distância.
O aluno	Elemento para quem o material é preparado. O aluno eficiente e produtivo é o que lida "cientificamente" com os problemas da realidade.
O professor	É o educador que seleciona, organiza e aplica um conjunto de meios que garantam a eficiência e eficácia do ensino.
Ensino e aprendizagem	Os objetivos educacionais são operacionalizados e categorizados a partir de classificações: gerais (educacionais) e específicos (instrucionais). Ênfase nos meios: recursos audiovisuais, instrução programada, tecnologias de ensino, ensino individualizado (módulos instrucionais), "máquinas de ensinar", computadores, *hardwares, softwares*. Os comportamentos desejados serão instalados e mantidos nos alunos por condicionantes e reforçadores.

Quadro 2 – Abordagem comportamentalista

Fonte: Santos (2005, p. 23)

3. O pensamento Humanista

Coloca ênfase no crescimento que resulta, centrado no desenvolvimento da personalidade do indivíduo na sua capacidade de atuar como uma pessoa integrada. Para Mizukami (1986, p.7), "O professor em si não transmite o conteúdo, dá assistência sendo facilitador da aprendizagem. O conteúdo advém das próprias experiências do aluno o professor não ensina: apenas cria condições para que os alunos aprendam."

Para Santos (2005), o foco é o sujeito, isto é, um ensino centrado no estudante. Os referenciais teóricos humanistas se sustentam nos estudos de Carl Rogers (1972) que não são estabelecidos para a Educação, mas para fins terapêuticos. A ideia rogeriana, para Santos (2005, p.23), "[...] enfatiza as relações interpessoais objetivando o crescimento do indivíduo em seus processos internos de construção e organização pessoal da realidade, de forma que atue como pessoa integrada." A educação tem como finalidade primeira a criação de condições que facilitam a aprendizagem favorecendo tanto o crescimento intelectual como emocional de modo que os estudantes tornem-se pessoas de iniciativa, responsabilidade e autodeterminação. Os motivos de aprender são do próprio estudante. O professor, segundo Santos (2005) é facilitador do processo, fornecendo condições para que os estudantes aprendam.

Para Mizukami (2005, p. 23) a teoria enfatiza técnica ou método para facilitar a aprendizagem. "Cada educador eficiente deve elaborar a sua forma de facilitar a aprendizagem no que se refere ao que ocorre em sala de aula e à ênfase atribuída à relação pedagógica, a um clima favorável ao desenvolvimento das pessoas, que possibilite

liberdade para aprender".

O quadro 3 apresenta características da abordagem humanista em relação à escola, ao aluno, ao professor e ao ensino e aprendizagem.

Elementos relevantes na abordagem humanista	
A escola	Escola proclamada para todos. "Democrática". Afrouxamento das normas disciplinares. Deve oferecer condições ao desenvolvimento e autonomia do aluno.
O aluno	Um ser "ativo". Centro do processo de ensino e aprendizagem. Aluno criativo, que "aprendeu a aprender". Aluno participativo.
O professor	É o facilitador da aprendizagem.
Ensino e aprendizagem	Os objetivos educacionais obedecem ao desenvolvimento psicológico do aluno. Os conteúdos programáticos são selecionados a partir dos interesses dos alunos. "Não-diretividade". A avaliação valoriza aspectos afetivos (atitudes) com ênfase na auto-avaliação.

Quadro 3 – abordagem humanista

Fonte: Santos (2005, p. 24)

4. O pensamento cognitivista

A abordagem cognitivista, segundo Mizukami (1986) configura-se pela forma de organização do conhecimento, processamento de informações estilos de pensamento ou cognitivos, comportamentos relativos à tomada de decisões. É predominantemente interacionista entre sujeito e objeto e o aprendizado é decorrente da assimilação do conhecimento pelo sujeito e, também, de modificação de estruturas mentais já existentes.

Em relação à educação Mizukami (1986, p.71) ainda expressa que:

> A educação pode ser considerada igualmente como um processo de socialização (que implica equilíbrio nas relações interindividuais e ausência de regulador externo/ordens externas), ou seja, um processo de "democratização" das relações.

O Quadro 4 mostra os elementos que caracterizam a abordagem cognitivista em relação à escola, ao aluno, ao professor e ao ensino e aprendizagem

Elementos relevantes na abordagem cognitivista

A escola	Deve dar condições para que o aluno possa aprender por si próprio. Deve oferecer liberdade de ação real e material. Deve reconhecer a prioridade psicológica da inteligência sobre a aprendizagem. Deve promover um ambiente desafiador favorável à motivação intrínseca do aluno.
O aluno	Papel essencialmente "ativo" de observar, experimentar, comparar, relacionar, analisar, justapor, compor, encaixar, levantar hipóteses, argumentar etc.
O professor	Deve criar situações desafiadoras e desequilibradoras, por meio da orientação. Deve estabelecer condições de reciprocidade e cooperação ao mesmo tempo moral e racional.
Ensino e aprendizagem	Deve desenvolver a inteligência, considerando o sujeito inserido numa situação social. A inteligência constrói-se a partir da troca do organismo com o meio, por meio das ações do indivíduo. Baseados no ensaio e no erro, na pesquisa, na investigação, na solução de problemas, facilitando o "aprender a pensar". Ênfase nos trabalhos em equipe e jogos.

Quadro 4 – abordagem cognitivista

Fonte: Santos (2005, p. 26)

5. O pensamento sociocultural

Este estudo do processo de ensino e aprendizagem enfatiza aspectos sócio-político- culturais. Tem origem no trabalho de Paulo Freire e no movimento de cultura popular, com ênfase, principalmente, na alfabetização de adultos. Para Santos (2005, p. 25) "[...] essa abordagem pode ser caracterizada como interacionista entre o sujeito e o objeto de conhecimento, embora com enfoque no sujeito como elaborador e criador do conhecimento." Nesta concepção o fenômeno educativo não se restringe à educação formal por intermédio da escola, mas a um processo amplo de ensino e aprendizagem. Para Santos (2005, p.25) "[...] a educação é vista como um ato político, que deve provocar e criar condições para que se desenvolva uma atitude de reflexão crítica, comprometida com a sociedade e sua cultura."

Considerando os atributos destas teorias de ensino e aprendizagem e relacionando com as práticas educativas desenvolvidas na maioria das escolas da Educação Básica verifica-se que, à primeira vista, supõe-se que uma descrição dos modos de ensinar Matemática é suficiente. No entanto, como afirma Fiorentini (1995) logo percebe-se que isso não se afigura tão simples e muito menos suficiente, uma vez que por trás de cada modo de ensinar revela- se uma particular concepção de ensino, educação, homem, sociedade, de Matemática e de Educação. A maneira como se realiza o ensino revela muito sobre o professor e sobre o ser que se quer formar, os valores e as finalidades que se atribui ao ensino de Matemática, como considera o estudante, a relação professor - estudante, trazendo também a sua visão de mundo, homem e sociedade. A esse ponto de vista junta-se a defesa de outros educadores matemáticos como ERNEST (1991), PONTE

(1992), THOMPSON (1984), STEINER (1987) e ZÚNIGA (1987), conforme Fiorentini (1995, p.4), “[...] os quais sustentam que a forma como vemos e entendemos a Matemática têm fortes implicações no modo como entendemos e praticamos o ensino de Matemática e vice-versa.”

Ressaltamos que nessa apresentação, deve-se ter em mente seu caráter parcial e arbitrário, assim como, as limitações e problemas decorrentes da delimitação e caracterização imprescindíveis de cada abordagem tratada.

O ENSINO DA MATEMÁTICA NA CONCEPÇÃO TRADICIONAL

Uma aula de Matemática, nesta linha, prima pela centralidade do professor. Ele é a autoridade absoluta. Para Mizukami (1986), “a ênfase é dada às situações de sala de aula, onde os alunos são “instruídos” e “ensinados” pelo professor. Os conteúdos e as informações têm de ser adquiridos, os modelos imitados”.

Para Fiorentini (1995, p.6), os livros anteriores a 1950 nos estudos de Imenes (1989), Miguel, Fiorentini e Miorin (1992) reproduzem o modelo Euclidiano, pois “[...] geralmente partem de elementos primitivos e definições para prosseguir com a teoria (teorema e demonstrações). Só após esta apresentação completa é que aparecem os exercícios de aplicação”. Um exemplo desse formato pode ser visto nas Figuras 1, 2 3.

Na estrutura dos livros, tudo é justificado e demonstrado logicamente. A geometria pela sua consistência lógica ocupa lugar de destaque no currículo escolar pois, segundo Fiorentini (1995, p.6), a principal finalidade do ensino de Matemática é o desenvolvimento do espírito da disciplina mental e do pensamento lógico-dedutivo.

SEXTA PROPRIEDADE — *Teorema: Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.*

Sejam os ângulos $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}B'$ (fig. 47). Temos:

H { $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}B'$ são o.p.v.
T { $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$.

DEMONSTRAÇÃO:

1. De fato, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}A'$ são adjacentes e portanto suplementares (3.º teorema). Também $B\hat{O}A'$ e $A'\hat{O}B'$, sendo adjacentes, são suplementares.
2. Logo: $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ porque admitem o mesmo suplemento $B\hat{O}A'$ (n.º 27 – Obs.).

c.q.d.

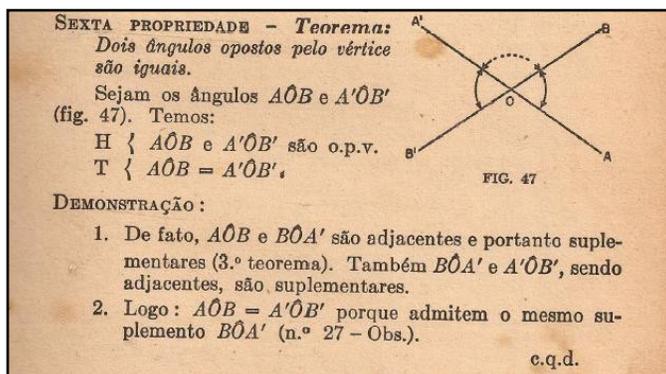



Figura 1 – Exemplo de uma exposição do assunto nos livros

Fonte: Sangiorgi (1954, p.107)

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1.°) Determinar o valor dos 3/4 do suplemento de um ângulo de 60°.

Se o ângulo dado vale 60° o seu suplemento valerá 120° (180° − 60°) e os 3/4 dêste suplemento valerão:

$$\frac{3}{4} \times 120° = \frac{360°}{4} = 90°.$$

Resposta: 90° (ângulo reto).

2.°) Calcular o valor de um ângulo que é igual ao *dôbro* de seu complemento.

Seja x o valor do ângulo procurado. O seu complemento será: $90° - x$ e a equação resultante do problema:

$$x = 2\,(90° - x).$$

Figura 2 - Exemplo de exercício de aplicação.

Fonte: Sangiorgi (1954, p.107)

40 *Matemática — Primeiro ano — Segundo grau*

Exercícios: Progressões aritméticas e geométricas 41

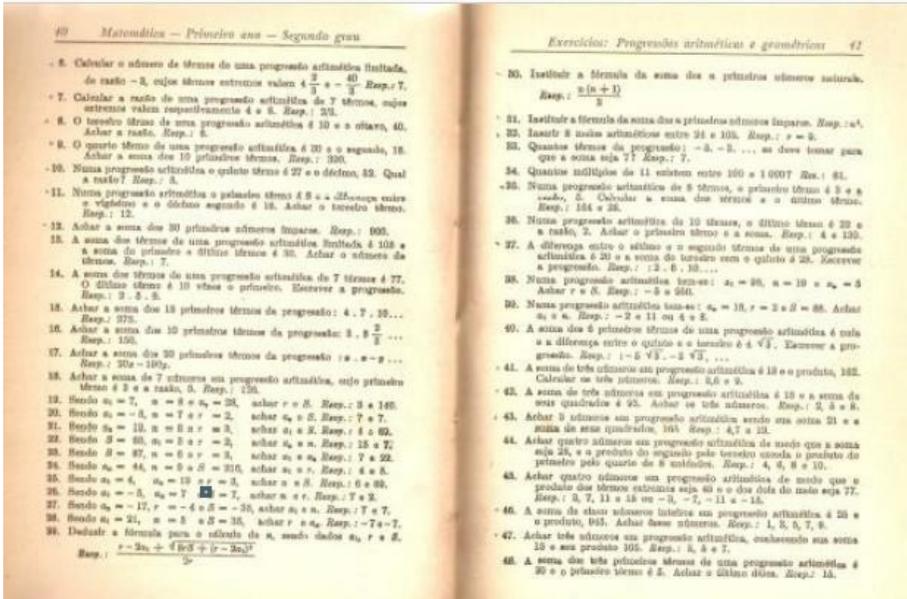



Figura 3 – Exemplo de lista de exercícios.

Fonte: Quintella (1973, p. 40 - 41)

PENSAMENTO COGNITIVISTA

A abordagem cognitivista se refere às investigações dos processos centrais do indivíduo. Para Mizukami (1986, p. 59) “[...] esses processos dificilmente observáveis tais como: organização do conhecimento, processamento de informações, estilos de pensamentos ou estilos cognitivos, comportamento relativos à tomada de decisões, etc.”.

Nesta ideia “[...] o conhecimento é considerado como uma construção contínua. A passagem de um estado de desenvolvimento para o seguinte é sempre caracterizada por formação de novas estruturas que não existiam anteriormente no indivíduo”. (MIZUKAMI, 1986, p.64).

O processo educacional, consoante a teoria de desenvolvimento e conhecimento, segundo Mizukami (1986), desempenha papel importante, ao provocar situações desequilibradoras para o estudante, para a autora desequilíbrios esses adequados ao nível de desenvolvimento em que a criança vive intensamente (intelectual e afetivamente) cada etapa de seu desenvolvimento em que se encontram.

Segundo o pensamento, é um ensino que desenvolve a inteligência e privilegia as atividades do sujeito, considerando-o inserido numa situação social. Para Mizukami (1986, p.75) a concepção piagetiana de aprendizagem tem caráter de abertura e comporta possibilidades de novas indagações. Aprender implica assimilar o objeto a esquemas mentais.

Dessa forma no processo de ensino e aprendizagem cabe ao professor evitar fixação de respostas ou hábitos. Consiste em provocar desequilíbrio e propor desafios. Orienta o estudante e lhe concede ampla margem de autocontrole e autonomia. Não existe modelo pedagógico piagetiano. O que existe é uma teoria do conhecimento humano que traz implicações para o ensino. A ação do sujeito é, pois, o centro do processo e o fator social ou educativo constituem uma condição de desenvolvimento.

O ensino da Matemática prioriza, essencialmente, a função ativa do estudante de conjecturar, pesquisar, experimentar, comparar, criar estratégias próprias, desenvolver a capacidade de argumentação. O ensino e a aprendizagem centram-se na pesquisa, na investigação e solução de problemas, incentivando o aprender a aprender, o aprender a pensar e o trabalhar em grupo.

ABORDAGEM SOCIOCULTURAL

Têm suas raízes nos trabalhos de Paulo Freire e no movimento que privilegia a cultura popular. Nessa perspectiva o fenômeno educativo, conforme Santos (2005), torna-se um processo amplo de ensino e aprendizagem, inserido na sociedade.

Essa forma de abordagem enfatiza aspectos sócio-político-culturais da educação. A Educação tem como objetivo desenvolver e levar o indivíduo a uma consciência crítica realidade para melhorá-la, pela transformação. É uma educação que busca levar à transformação social. Assim, o estudante é considerado uma pessoa concreta, objetiva que determina e é determinada pelo social, político, econômico. Em termos de posicionamento, segundo Mizukami (1986, p.86), “a obra de Paulo Freire consiste em uma síntese pessoal de tendências tais como: neotomismo, o humanismo, a fenomenologia, o existencialismo e o neomarxismo”.

No ensino de Matemática a condução do processo de ensino e aprendizagem é de responsabilidade do educador, a relação entre professor e estudante é horizontal e ambos posicionam-se como sujeitos do ato de conhecer.

Pela teoria sociocultural, segundo Santos (2005, p.27), os objetivos educacionais são definidos a partir das necessidades do contexto histórico-social no qual os estudantes estão inseridos. O diálogo e grupo de discussão são fundamentais para o aprendizado e a formação de uma consciência crítica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essas abordagens descritas mostram alguns aspectos a serem considerados na prática educativa relacionada ao ensino da Matemática. Um deles é a multidimensionalidade do processo educacional considerado em nível teórico que se configura nas descrições acima mencionadas. Outro aspecto refere-se à possibilidade de se analisar as interpretações do fenômeno educacional em seus pressupostos, decorrências e implicações conceituais.

Em Mizukami (1980), nenhuma teoria por sua própria natureza e fins seja preparada e afronte às mudanças sociais, filosóficas e psicológicas, pelo menos sob a perspectiva do ser humano que a examina, a utiliza e participa do mundo em que vive. A autora afirma, além disso, que as teorias, não são os únicos mananciais onde encontramos todas as respostas para o complexo processo do ensino e aprendizagem

Esse assunto não se esgota aqui, convida-nos a refletir sobre a forma de realizar a nossa prática educativa, em relação ao ensino da Matemática mesmo levando-se em consideração nessa apresentação seu caráter resumido e arbitrário. Entretanto, a utilização de uma ou outra forma de abordagem do processo de ensino e aprendizagem traz implicações e, em alguma medida atinge os estudantes em relação ao ensino da Matemática tenha ou não, o professor, consciência disso.

REFERÊNCIAS

FIORENTIN, D. . Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil: In **Zetetiké**/ Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Circulo de Estudo e Memória e Pesquisa em Educação Matemática. CEMPEM , 1995.

QUINTELLA, A. **Matemática primeiro ano segundo grau**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973.

MIZUKAMI, M. das G. N. **Ensino**: as abordagens do processo: São Paulo: EPE, 1986.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Ginasial** – 3ª série. São Paulo: Companhia Nacional, 1954.

SANTOS, R. V. dos. Abordagens do processo de ensino e aprendizagem. In: **Integração**. Ano XI, nº 40, p 19-31, jan./fev./mar. 2005.

CAPÍTULO 18

GEOGEBRA: A TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS SURDOS

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 09/03/2022

Gustavo Henrique Silva
Cursando Licenciatura em Química, Instituto Federal de Goiás - Campus Itumbiara
Itumbiara – Goiás
http://lattes.cnpq.br/9130240057639065

Wáquila Pereira Neigrames
Mestre em Estudos da Linguagem, Docente no Instituto Federal de Goiás - Campus Itumbiara
Itumbiara – Goiás
http://lattes.cnpq.br/1946935919111717

RESUMO: Este trabalho buscou levantar uma discussão acerca do uso do aplicativo GeoGebra e a acessibilidade linguística para aumentar a acessibilidade dos alunos surdos na sala de aula. O GeoGebra é um software criado por Markus Hohenwarter que reúne as mais diferentes ferramentas e recursos de álgebra, geometria, probabilidade e outros, em diferentes formas de representação. Além disso, devemos pensar que a tecnologia está cada vez mais presente, nas atuais gerações e em sala de aula. O uso das imagens permite então, uma ponte de acessibilidade para os alunos surdos, tendo em vista a forma como essa comunidade se comunica, com a Língua Brasileira de Sinais, LIBRAS. Conclui-se que a aplicabilidade do software em disciplinas de exatas, em especial a matemática, vai facilitar o processo de ensino-aprendizagem, e não só deles, mas também de todos os alunos ouvintes, em diversos conteúdos, isso porque o software livre GeoGebra possui mecanismos articulados que auxiliam no entendimento de conceitos abstratos e de difícil compreensão dos alunos, usando forma e cor. Sua aplicação ocasiona bons resultados, como demonstrado na literatura apresentada.

PALAVRAS-CHAVE: Inclusão, GeoGebra, Surdos, Libras.

GEOGEBRA: TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING TO DEAF STUDENTS

ABSTRACT: This work sought to raise a discussion about the use of the GeoGebra application and linguistic accessibility to increase the accessibility of deaf students in the classroom. GeoGebra is a software created by Markus Hohenwarter that brings together the most different tools and resources of algebra, geometry, probability, and others, in different forms of representation. In addition, we must think that technology is increasingly present, in current generations and the classroom. The use of images then allows a bridge of accessibility for deaf students, given the way this community communicates, with the Brazilian Sign Language, LIBRAS. It is concluded that the applicability of the software in exact disciplines, especially mathematics, will facilitate the teaching-learning process, not only for them but also for all listening students, in different contexts, because the free software GeoGebra has articulated mechanisms that help the understanding of abstract concepts that are difficult for students to understand, using shape and color. Its application produces good

results, as demonstrated in the literature presented.
KEYWORDS: Inclusion, GeoGebra, Deaf, Libras.

1 I INTRODUÇÃO

A partir de algumas reflexões acerca de metodologias de ensino visando as necessidades de ensino e a aprendizagem nas disciplinas de exatas, em especial a matemática, levantou-se dados acerca da utilização do *software* GeoGebra como facilitador no processo de ensino-aprendizagem, sendo este utilizado nas próprias aulas da graduação por professores que fizeram o uso para ampliar o ensino de alguns conteúdos.

Para tanto, este trabalho pretende promover uma reflexão e consequentemente uma discussão sobre o uso do GeoGebra e a acessibilidade linguística que este promove para que os alunos surdos tenham uma maior inclusão dentro da sala de aula. Além de propiciar uma interação maior, buscando a interdisciplinaridade entre a língua de sinais e o GeoGebra. Dessa maneira, houve discussões em algumas disciplinas como cálculo, química e Libras, que foram primordiais para elaboração de estratégias metodológicas de ensino para os alunos surdos, contribuindo também para a utilização da língua de sinais em outras disciplinas dentro da graduação.

É importante entender que para o uso do *software* na modalidade de ensino para os alunos surdos, é primordial a utilização da Libras, portanto, é interessante e necessário pensar na formação do profissional que trabalhará com este público, tentando motivar os professores que ministram aulas a estes estudantes e conseguinte permitir a inovação em suas práticas pedagógicas referentes ao ensino de suas disciplinas. Esse pensamento vai de encontro com a ideia de Perez (2004, p. 252), já que:

> [...] a formação é um suporte fundamental do desenvolvimento profissional; o desenvolvimento profissional de cada professor é da sua inteira responsabilidade e visa torná-lo mais apto a conduzir um ensino de matemática adaptado às necessidades dos alunos.

Deste modo, é indispensável pensar em desenvolver metodologias que possam tornar o aprender mais fácil e dinâmico, que de alguma forma, ligue a cultura surda ao processo de ensino-aprendizagem, metodologias essas que ainda se encontram escassas (GESSER, 2009). E isso pode ser feito ao constatar a importância do uso da imagem no processo de comunicação para essa comunidade (STUMPF, 2010).

Ao unir os pontos citados anteriormente, teremos em mente que a matemática pode e é mais atraente aos olhos dos alunos surdos (CUKIERKORN, 1996, p. 109 *apud* MOREIRA, 2016, p. 751), assim nossa pesquisa foi norteada a partir da seguinte pergunta: Poderia o GeoGebra, um *software* que usa a imagem para ensinar matemática de forma mais direta, ser utilizado no ensino de pessoas surdas como um facilitador no processo de ensino-aprendizagem?

2 | GEOGEBRA COMO FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DO SURDO

> "Exatamente do mesmo modo, no caso dos surdos-mudos, a dactilologia (ou alfabeto manual) permite substituir por signos visuais, por diversas posições das mãos, os signos sonoros do nosso alfabeto e compor no ar uma escrita especial, que a criança surda-muda lê com os olhos" (VIGOTSKI, p. 868, traduzido em 2011 por Denise Regina Sales, Marta Kohl de Oliveira e Priscila Nascimento Marques).

A língua materna tem grande importância na vida dos alunos, inclusive do aluno surdo, pois é a partir dela que o aluno pode então, desenvolver sua linguagem. Considerando o exposto na epígrafe, é necessário que pensemos em metodologias de ensino que irão utilizar o campo visual para melhor atender os alunos surdos. Para tal, o docente precisa se reinventar, pois, contamos com um crescente avanço nas ferramentas tecnológicas e diferentes tipos de metodologias de ensino-aprendizagem. Em relação à acessibilidade neste processo, ainda estamos engatinhando, principalmente quando se trata de discussões acerca de metodologias de ensino da Libras e/ou seu uso para diferentes disciplinas, como afirma Gesser (2009).

A linguagem e a língua, para tanto, têm papel fundamental na vida de qualquer indivíduo, ouvinte ou não. Essa importância também se reflete no coletivo. Por exemplo, um dos índices que nos mostra o desenvolvimento de um país está ligado ao analfabetismo da população, ou ainda o fato de imigrantes, que não são familiarizados com a língua do país onde se encontram, acabam sendo empurrados para empregos com remuneração mais baixa. Através delas é que o homem passa as informações para seus próximos, sejam de lugares e até tempos diferentes. Para que ela funcione da melhor maneira possível, temos que analisar a eficácia no entendimento da mesma tanto de quem transmite, quanto de quem recebe a mensagem (SIM-SIM, 2002).

Para pensar no ensino, devemos nos distanciar da ideia de algo fixo, imutável ou isolado. Trata-se de um processo que está em constante mudança na busca de atender as necessidades dos alunos a que se pretende ensinar. E assim, não podemos pensar na mesma nos dias de hoje sem levar em conta tecnologia e suas inúmeras possibilidades (PERIUS, 2012). No processo de ensino-aprendizagem, as tecnologias podem trazer grandes transformações, auxiliando alunos e professores, derrubando barreiras geográficas, acelerando o compartilhamento de informações, facilitando a comunicação, assim como torna esse processo mais chamativo e atraente para ambas as partes.

As atuais gerações surgem cada vez mais dotadas de novas características e dominando o uso tecnológico. Nada mais natural que a escola, na figura do professor, pare de concorrer com as tecnologias presentes em sala de aula e passe a fazer parte dessa realidade virtual despertando o interesse do aluno para determinado conteúdo utilizando como recurso didático as diferentes ferramentas tecnológicas e metodologias já existentes: *notebooks*, *tablets*, *smartphones*, lousas digitais, *softwares* educacionais etc. O que

possibilita um aprendizado rápido, disponível em todo lugar e em todo tempo (OLIVEIRA et. Um lal., 2012). Assim, partindo desse entendimento, podemos pensar em sua utilização para o ensino-aprendizagem do aluno surdo?

> Do ponto de vista dos surdos o uso do computador e da Internet inaugurou uma nova dimensão às suas possibilidades de comunicação, pois são tecnologias acessíveis visualmente. Se, para os ouvintes, elas abriram perspectivas que levaram a modificações profundas nos usos e costumes de toda a sociedade, para os surdos, essas mudanças podem ser ainda mais significativas. (STUMPF, 2010, p. 2)

Ainda segundo o autor, a internet possibilitou muitas mudanças no uso da tecnologia, abriu portas para a população em geral, assim como para a comunidade surda, pois utilizam da modalidade visual para se comunicarem, proporcionando uma nova forma de inclusão. Em contrapartida, problemas podem ser mencionados nesse sentido, como a necessidade de sujeitos alfabetizados na língua escrita, além de todo o aparato que é necessário para que seja utilizado por uma pessoa surda, como o uso de câmeras e intérpretes de Libras.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, para o ensino fundamental, logo nas disposições iniciais temos que a matemática é importante para a construção da cidadania nos alunos e que a sociedade a utiliza cada vez mais. Ali também se destaca que a mesma deve estar ao alcance de todos e que isso deve ser prioridade dos docentes. A matemática tem papel importante na formação básica do indivíduo, formação essa que se liga ao mundo do trabalho, a vida em sociedade e a cultura. Já os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e outro documento, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, ressaltam como a mesma é responsável por desenvolver a habilidade do pensamento dos alunos e auxiliar na resolução de problemas, e como seu ensino deve ser contextualizado para alcançar esses objetivos.

Segundo o Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro, membro do Instituto Internacional GeoGebra – IGI (*International GeoGebra Institutes*):

> Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.

Assim o GeoGebra é um *software* que vai de encontro com um ensino-aprendizagem com acessibilidade, possibilitando um maior acesso a alunos surdos a partir do visual. Por exemplo, ele apresenta recursos matemáticos como a geometria e a álgebra para elucidar

e demonstrar visualmente os gráficos.

Até porque há pesquisas que compartilham da ideia de que a matemática é mais atraente aos olhos dos alunos surdos do que as disciplinas que envolvam a linguagem (CUKIERKORN, 1996, p. 109 apud MOREIRA, 2016, p. 751). Dessa forma é compreensível considerar o GeoGebra como um facilitador no processo de ensino de exatas a este público. Veja os exemplos abaixo:

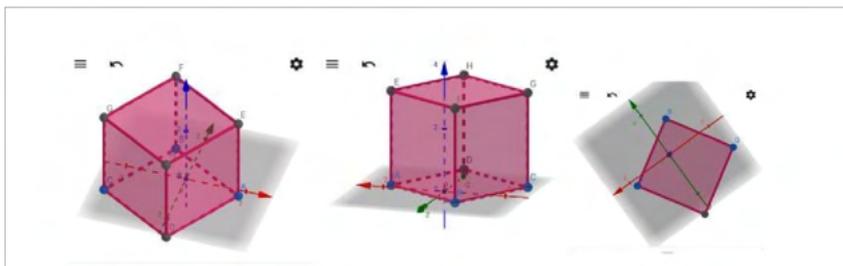



Figura 1: Imagens retiradas do GeoGebra

Aqui podemos ver, em diferentes perspectivas, a figura do cubo, o que facilita a sua visualização espacial e a compreensão da geometria. Ele pode apresentar diversas figuras diferentes.

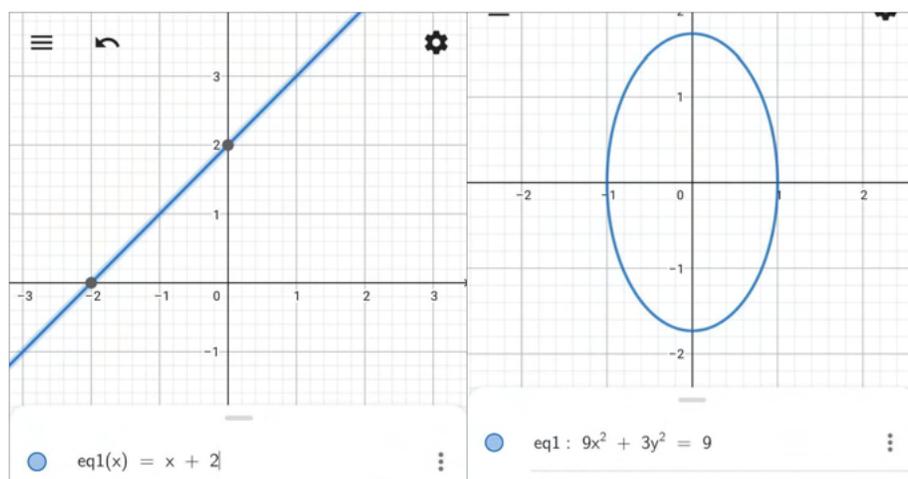



Figura 2: Imagens retiradas do GeoGebra

Na figura 2, podemos ver seu uso para aprender sobre a imagem gráfica da função afim ou no estudo da elipse, nesta ordem respectivamente. Assim podemos utilizá-lo para o conteúdo de funções e equações e suas representações gráficas.

3 | DISCUSSÕES

O software livre GeoGebra possui mecanismos articulados que auxiliam no entendimento de conceitos abstratos e de difícil compreensão dos alunos, usando forma e cor. Sua aplicação ocasiona bons resultados. Vale ressaltar que a educação é um campo que deve continuar em constante evolução, principalmente no uso de tecnologias. Porém, sabe-se que existem um conjunto de dificuldades, principalmente nas escolas públicas, como a falta de estrutura e material, disponibilização de acesso à internet e a falta de profissionais qualificados para desenvolver tais atividades.

Antunes (2020) em sua pesquisa, corrobora o uso do software, ao oferecer uma formação continuada a professores, propondo o GeoGebra como recurso didático para ensinar alunos surdos sobre geometria. Ao recolher dados dos docentes participantes, sobre o uso posterior a formação em sala de aula, ele constatou o claro interesse dos docentes em relação a sua aplicação e como também foi relevante aos alunos ouvintes, que participaram de uma aula diferente. Dentre os problemas apontados pelo autor, podemos destacar a falta de recursos para que tais aulas aconteçam e a falta de ofertas para formação continuada em matemática. Ainda salienta que, para obter sucesso nesse desenvolvimento, é interessante propor o uso deste software juntamente com os recursos pedagógicos aliados à Libras

Silveira e Silveira (2019), em seu estudo de caso com alunos surdos de uma escola, se baseando no bilinguismo e no uso do visual, relatam a naturalidade como os alunos surdos escreveram as funções e debateram sobre elas. Além disso, outros autores também já descreveram sobre o uso do aplicativo para o ensino em sala de aula, como Mendes, Jolandek e Pereira (2019) para o ensino de função afim.

4 | CONSIDERAÇÕES

Compreendendo todo este contexto educacional relacionado ao aplicativo GeoGebra para o ensino de surdos e propondo responder à pergunta norteadora, conclui-se que a aplicabilidade do *software* em disciplinas de exatas, em especial a matemática, vai facilitar o processo de ensino-aprendizagem para estes, e não só deles, mas também de todos os alunos ouvintes, em matérias relacionada a cálculo, gráficos, geometria e afins.

Além de ressaltar a importância do uso de linguagem visual, imagem, que proporciona uma acessibilidade imprescindível para os alunos surdos. Ainda, com o apoio da Libras como língua norteadora no ensino, o desenvolvimento desses alunos tem um salto singular, visto que a compreensão é mais rápida e assertiva.

Dessa maneira, é compreensível que recomendamos o uso do *software* GeoGebra como mediador do ensino de exatas, principalmente a matemática e que também pode ser estendido a outras matérias exatas como a química, para alunos surdos, uma vez que

este fora bem recebido mesmo que por uma quantidade pequena de amostra. O objetivo, é fazer um estudo maior, com uma amostra grande de participantes para confirmar essas hipóteses e dados.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, M. de F. N. ***Matemática e surdos: o software GeoGebra como recurso para auxiliar o ensino de geometria*.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). Universidade do Vale do Taquari Univates. Lajeado, Rio Grande do Sul, p. 205. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Ministério da educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. 141p.

BRASIL. Ministério da educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** 2000. 109p.

GESSER, A. ***LIBRAS? Que língua é essa?*** **Crenças e preconceitos em torno da realidade surda e da língua de sinais**. São Paulo: Parabola Editorial, 2009.

GÖTZINGER, H. B. ***Atividades Matemáticas sobre funções com o uso do Geogebra****.* 2010. 53 f. (Pós-graduação em matemática) – Departamento de matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2010.

INSTITUTO GEOGEBRA NO RIO DE JANEIRO*.* ***Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense,*** Rio de Janeiro. Disponível em: <https://www.google.com/url?q=http://www.geogebra.im-uff.mat.br/&sa=D&sour ce=editors&ust=1622774563881000&usg=AOvVaw3D9-JvOMzfWrYL0EYc2eZ>. Acesso em 3 de junho de 2021.

MENDES, L. O. R; JOLANDEK, E. G; PEREIRA, A. L*.* ***Uma abordagem com mobile learning: Ensino de funções afim auxiliado pelo GeoGebra****.* International Journal of Knowledge Engineering and Management. Florianópolis, v.7, n.19, p.41-58, nov. 2018/ fev. 2019.

MOREIRA, G. E. ***O ensino de matemática para alunos surdos: dentro e fora do texto em contexto.*** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.18, n.2, pp. 741-757, 2016.

OLIVEIRA, J. B. et al. ***O uso de tablets e o geogebra como ferramentas auxiliadoras no ensino de matemática.*** In: Conferência Latino-Americana de Geogebra, 2012, Uruguai. Anais eletrônicos.

PEREZ, G**. *Prática reflexiva do professor de matemática.*** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. (Orgs.) Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 263-282.

PERIUS, Ana Amélia Butzen. **A tecnologia aliada ao ensino de matemática**. 2012.

VIGOTSKIL, S. ***A defectologia e o estudo do desenvolvimento e da educação da criança anormal.*** Traduzido em 2011 por Denise Regina Sales, Marta Kohl de Oliveira e Priscila Nascimento Marques. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 37, n. 4, p. 861-870, dez. 2011.

SILVEIRA, C. F; SILVEIRA, D. N. ***Adaptação de atividades matemáticas para alunos surdos: utilizando o software geogebra.*** Brazilian Journal of Development. Curitiba, v. 5, n. 6, p. 6502-6508, jun. 2019.

SIM-SIM, Inês. **Desenvolver a linguagem, aprender a língua.** Novas Metodologias em Educação. Porto: Porto Editora, p. 197-226, 1995.

STUMF, M.R**. *Educação de Surdos e Novas Tecnologias.*** Florianópolis: UFSC, 2010.

CAPÍTULO 19

PREVISÃO DO ÍNDICE BURSATIL IBEX 35 USANDO REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

Data de aceite: 02/05/2022

Salvador Falcón Canillas
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Ilha Solteira – SP

Carlos Roberto Minussi
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Ilha Solteira – SP

RESUMO: A previsão de índices bolsistas de diferentes bolsas de valores é uma das questões mais importantes para economistas e investidores, a fim de conhecer, antecipadamente, os movimentos que ocorrem no mercado de investimento. Os investidores confiam, frequentemente, no seu conhecimento da economia dos mercados, dos fatores macroeconômicos dos países e de outros recursos, tais como: o comportamento dos gráficos de ações, para fazerem os seus investimentos da forma mais eficiente possível. O fato de serem pessoas que usam seu julgamento para investir no mercado de ações torna-se uma tarefa complicada, se não impossível, avaliar todos os fatores envolvidos no mercado de ações. Além dessa incapacidade, há fatores como elementos psicológicos e julgamentos errôneos subjetivos que podem levar o investidor a ter perdas econômicas, ou a não aproveitar boas oportunidades de investimento. Por essas razões, ao longo das últimas décadas, foram feitas tentativas de prever índices bolsistas, com diferentes sistemas entre eles: Modelos lineares, tais como ARIMA, Garch e Arch, redes neuronais tais como Feedforward Neural Network (FNN), Generalized Regression Neural Network (GRNN), Probabilistic Neural Network (PNN), etc. e a combinação de modelos lineares e redes neurais. Nesta pesquisa propõe-se uma forma como realizar a previsão do valor no dia seguinte do índice de ações espanhol IBEX 35, utilizando três redes neurais artificiais diferentes e comparando o desempenho de cada uma dessas redes em diferentes situações. O IBEX 35 é o principal índice de referência do mercado acionário da bolsa espanhola. É formado pelas 35 empresas mais líquidas listadas no Sistema de Interconexão da Bolsa de Valores Espanhola nas quatro bolsas de valores espanholas. As redes neurais a serem empregadas são *Feedforward*, *Cascade-Forward* e *Generalized Regression*
PALAVRAS-CHAVE: Previsão. Ibex 35. Bolsa de valores. *Backpropagation. Feedforward*. Cascade. Regressão generalizada.

ABSTRACT: Forecasting stock market indices from different stock exchanges are one of the most important issues for economists and investors, to know in advance, the movements that occur in the investment market. Investors often rely on their knowledge of the economy of the markets, the macroeconomic factors of the countries, and other resources, such as the behaviour of stock charts, to make their investments as efficiently as possible. Being people who use their judgment to invest in the stock market is complicated, if not impossible, to evaluate all the factors involved in the stock market. In addition to this inability, there

are factors such as psychological elements and subjective misjudgements that may lead the investor to have economic losses or not take advantage of good investment opportunities. For this reason, over the last decades, attempts have been made to predict stock market indices, with different systems among them: Linear models, such as ARIMA, Garch, and Arch, neural networks such as the Feedforward Neural Network (FNN), Generalized Regression Neural Network (GRNN), Probabilistic Neural Network (PNN), etc. and the combination of linear models and neural networks. This research presents how to forecast the next day value of the Spanish IBEX 35 stock index using three different artificial neural networks and comparing the performance of each of these nets in different situations. The IBEX 35 is the main reference index of the Spanish stock market. It is formed by the 35 most liquid companies listed on the Spanish Stock Exchange's Interconnection System on the four Spanish stock exchanges. The neural networks to use are Feedforward, Cascade-Forward, and Generalized Regression Neural Network.
KEYWORDS: Forecast. Ibex 35. Stock market. Backpropagation. Feedforward. Cascade. Generalized regression.

1 I INTRODUÇÃO

Hoje em dia, a previsão dos índices bolsistas das diferentes bolsas internacionais é uma questão importante na economia global, uma vez que movimenta enorme quantidade de dinheiro. Muitos fatores influenciam se esses índices podem cair ou subir de valor.

Os fatores que influenciam estes índices podem ser provenientes de índices macroeconômicos nacionais, tais como: dívida externa, produção industrial, desemprego, prêmio de risco, reputação do banco nacional, taxa de juros, etc. (MACIÁN-PÉREZ, 2017)

Outros fatores, que podem influenciar os índices bolsistas de um país, são os índices bolsistas de outros países, o Brexit (a saída do Reino Unido da União Europeia), o preço das matérias-primas (ferro, ouro, petróleo etc.), guerras econômicas, conflitos militares, epidemias etc.

Como mencionado anteriormente, a previsão de índices bolsistas é uma tarefa muito importante do ponto de vista econômico e a sua previsão é crucial quando se fazem investimentos no mercado financeiro. Embora haja muitos economistas e especialistas em investimentos que confiam na sua própria experiência e conhecimentos para investir, eles são limitados pelas próprias condições humanas como: fatiga, erros subjetivos e a incapacidade de analisar enormes quantidades de dados.

Portanto, a previsão de índices bolsistas utilizando redes neurais artificiais (RNA) (HAYKIN, 2008) parece ser uma ideia bastante interessante para realizar esta tarefa, pois se tem um longo histórico de dados sobre os preços dos índices bolsistas diários de todo o mundo pode-se obter previsões de excelente precisão. Estes dados podem ser encontrados em páginas, tais como: *Yahoo Finance* ou *Investing*.

Há muitos artigos onde são utilizados diferentes métodos para prever os índices bolsistas de diferentes países, dos quais o artigo "PREDICCIÓN DEL ÍNDICE BURSÁTIL

IBEX 35 MEDIANTE SELECCIÓN DE INPUTS CON REDES NEURONALES" (FERNÁNDEZ-BENLLOCH, 2016) foi aquele em que se obteve a maior inspiração para este trabalho. Nele, é feita uma previsão do índice IBEX 35 utilizando a rede neural *Feedforward* e usando dados dos seguintes índices como entrada:

- Futuro IBEX
- IBEX
- DAX
- Futuro de Petróleo
- STANDARD AND POORS
- FTSE
- DOW JONES Industrial
- DOW JONES Transportes
- EUR/USD

Nesta pesquisa também foi realizada a previsão do índice IBEX 35, utilizando a técnica de janelamento. É realizada a previsão empregando-se três redes neurais diferentes, comparando o desempenho de cada uma delas em dois casos diferentes. No primeiro caso usou-se como entrada só os dados do mesmo IBEX 35 é no segundo caso foram usados outros índices bolsistas, commodities[1] e taxas de câmbio tomadas como entrada que seriam os seguintes:

- AEX (Holanda)
- BEL 20 (Bélgica)
- CAC 40 (França)
- DAX 30 (Alemanha)
- HANG SENG (Hong Kong)
- NIKKEI 225 (Japão)
- OMXS 30 (Suécia)
- S&P ASX 200 (Austrália)
- S&P TSX 60 (Canadá)
- SMI 30 (Suíça)
- Taiwan Weighted (Taiwan)

1 São aqueles produtos destinados ao uso comercial, e que têm como característica mais relevante, que não têm nenhum valor agregado, não são processados, ou não têm nenhuma característica diferenciadora em relação aos outros produtos que se encontram no mercado. Por este motivo são utilizados como matéria-prima para fabricar outras matérias elaboradas.

- IBEX 35 (Espanha)
- Milho
- Ouro
- Prata
- USD/JPY (taxa de câmbio entre o dólar americano e o iene japonês)
- EUR/CAD (taxa de câmbio entre o euro e o dólar canadense)
- EUR/AUD (taxa de câmbio entre o euro e o dólar australiano)
- EUR/JPY (taxa de câmbio entre o euro e o iene japonês)

As redes neurais a serem utilizadas são *Feedforward* (HAYKIN, 2008), *Cascade-Forward* (WARSITO, 2018) e Regressão Generalizada (*GRNN*) (SPECHT, 1991).).

2 | ESTADO DA ARTE

Economistas de todo o mundo sempre estudaram e tentaram compreender as flutuações de preços na bolsa de valores, porque os investimentos na bolsa de valores estão sujeitos a riscos, os retornos são variáveis e a sua existência é incerta. A previsão da bolsa de valores é um tema de interesse, particularmente para aqueles que investem na bolsa de valores. Por conseguinte, a previsão de um índice bolsista é muito desafiante e foram pesquisados vários métodos para prever o mais eficientemente possível.

Os modelos lineares, em razão à fácil interpretação dos seus elementos, possuem uma vantagem considerável sobre os modelos mais complexos, o que levou a sua utilização em muitas aplicações; uma delas tem sido a previsão de séries temporais financeiras. Nos anos 80, os modelos utilizados, para modelar a média de um bem, eram o *Arima* ou *Arimax*, mas nos anos 90 os modelos *ARCH* (ENGLE, 1982). e *Garch* (BOLLERSLEV, 1986) dão maior importância à volatilidade do que a média dos dados.

Em Franses e Ghijsels (1999) confirmaram que os modelos de *Garch* são úteis para prever a volatilidade do mercado bolsista, mas os resíduos estimados destes modelos apresentam, frequentemente, a demasiada curtose e não captam todas as características dos dados.

Chang, Yeung e Yip (2000) indicaram a influência de indicadores econômicos, tais como: a taxa de emprego, ou o índice de preços do consumidor, pois cada um deles é uma medida em relação a um detalhe da economia, pelo que relacionaram cada indicador por meio de um gráfico ao índice da bolsa de valores para compreender até que ponto as variáveis relacionadas com a bolsa de valores eram bem conhecidas.

Em 2003, os estudos continuam: Lasfer, Melnik & Thomas documentam o comportamento dos preços de ações, a curto prazo, após um período de tensão na bolsa, concentrando-se no comportamento diário dos preços da bolsa via 39 índices da bolsa. A

investigação mostrou que os desempenhos anormais após o stress são significativamente mais elevados para os mercados emergentes e a dimensão dos saltos após o período de stress está relacionada com a liquidez do mercado. (LASFER; MELNIK; THOMAS, 2003)

Bhardwaj e Swanson (2006) sugeriram um novo modelo chamado Arfima, que faz estimativas usando uma variedade de procedimentos padrão que fornecem previsões significativamente melhores do que *AR, MA, ARMA, Garch* e modelos relacionados, com base na análise dos erros médios quadráticos da previsão (*MSFE*) e na utilização de testes de precisão preditiva.

Liu e Hung (2010) realizaram um estudo no qual, utilizando a volatilidade diária do índice americano S&P-100, compararam os modelos *Garch-N, Garch-t, Garch-HT e Garch-SGT* com modelos do tipo assimétrico, tais como *GJR-Garch* e *Egarch*. Os resultados obtidos mostram que estes últimos melhoram a volatilidade da previsão e demonstram que o componente assimétrico é mais importante do que a especificação da distribuição quando estão presentes assimetria, leptocurtose e efeitos de Alavancagem.

Contudo, a economia destaca-se pela sua instabilidade e pela presença de não linearidade nos seus ciclos, o que torna os modelos lineares não inteiramente eficientes. Por esta razão, a exploração de dados é atualmente caracterizada pela utilização crescente de modelos de previsão não lineares.

Komo, Chang e Ko (1994) utilizam modelos estatísticos não paramétricos e não lineares porque muitas relações importantes na área das finanças têm este tipo de relação. As redes neurais artificiais têm a propriedade de capturar as características não lineares dos índices da bolsa e mostraram que podem ser treinadas com uma quantidade suficiente de informação para identificar tais relações não lineares entre os valores de entrada e saída. A aplicação de redes neurais à previsão de séries financeiras cresceu nos últimos anos, uma vez que parece ser um método eficaz e apresenta uma multiplicidade de oportunidades.

Zemke (1999) afirma que os mercados, com um menor volume de operações, são mais fáceis de prever. Utilizou a Bolsa de Varsóvia como referência e propôs as técnicas de *Machine Learning* (*ML*) (HAYKIN, 2008) para a sua análise. A tarefa é prever o valor do índice via decisões binárias, ou seja, prever se o valor do índice WIG na semana de negociação está acima ou abaixo do valor atual. As quatro técnicas *ML* utilizadas são: previsão de rede neural, classificador Bayesiano (STIGLER, 1983)*, K-nearest neighbor* (SILVERMAN, 1989) e *K-nearest neighbor prediction scrutinized* (Previsão do Vizinho mais próximo) (AL-DOSARY, 2019). Com estas técnicas concluiu-se que utilizando métodos *K-nearest neighbor*, com 64% de eficácia e redes neurais, se obtêm melhores previsões porque o mercado bolsista é dominado pela não linearidade dos dados. (ZEMKE, 1999).

No mesmo ano, Lee e Jo desenvolveram um intérprete gráfico para prever o mercado, a que chamaram *Candlestick Chart Analysis Expert System* (Sistema Especialista em Análise Gráfica de Velas) (MORRIS, 2006). Este sistema possui padrões e regras que podem prever os movimentos futuros dos preços das ações. Os padrões definidos são classificados em

cinco grupos no que diz respeito ao seu significado: queda, subida, neutralidade, tendência contínua, e padrões em que a tendência é invertida. Os resultados experimentais obtidos por Lee e Jo revelaram que o modelo teve uma taxa média de sucesso de 72%, o que ajuda os investidores a obterem maiores benefícios do seu investimento em ações. (LEE; JO, 1999).

O modelo de Chen, Leung e Daouk (2003) prevê a mudança no índice da Bolsa de Valores de Taiwan por meio de outro modelo de rede neural artificial chamado Rede Neural Probabilística (*PNN*); este método utiliza dados históricos do índice da Bolsa de Valores de Taiwan, e os resultados mostram que as estratégias de investimento baseadas nele obtêm retornos mais elevados do que outras estratégias, tais como métodos generalizados de momentos (*GMM*). A superioridade deste modelo deve-se à sua capacidade de identificar inconsistências e desinformação.

Toro, Molina e Garcés (2006) apresentaram um estudo comparativo entre a previsão de preços na bolsa de valores utilizando redes neurais e neuro-nebulosas *(neuro-fuzzy*). É apresentada uma metodologia aplicável à previsão do comportamento de qualquer tipo de ações, com base no cálculo preliminar da correlação entre o preço e outras variáveis de mercado. A previsão do valor das ações em bolsa afeta os processos de tomada de decisão das empresas ou outros agentes do mercado afetados pelo seu comportamento. Os resultados obtidos foram satisfatórios em termos da percentagem de erro do valor estimado em relação ao valor real. As técnicas inteligentes provam ser uma ferramenta interessante que está mostrando resultados promissores e a abrir um leque de possibilidades a explorar no campo da previsão.

Chaigusin, Chirathamjaree e Clayden (2008) mostram um caso particular em que a previsão do índice da Bolsa de Valores da Tailândia é realizada por meio de redes neurais do tipo *feedforward.* Os dados de entrada utilizados correspondem ao índice SET, Dow Jones, Nikkei, Hang Seng, o preço do ouro, a taxa mínima de empréstimo e as taxas de câmbio entre o thai-baht tailandês e do dólar, mostrando via pesquisa que os movimentos do índice da Bolsa de Valores da Tailândia são sensíveis às entradas acima referidas.

Alonso e García (2009) utilizam dados de alta frequência para encontrar um modelo estatístico que reduza o grau de incerteza quanto ao comportamento do futuro imediato (próximos dez minutos) dos operadores na bolsa colombiana, especificamente do IGBC; para tal, utilizam modelos de *Garch* em média (*Garch-M*), que levam em conta a alavancagem, o dia da semana, a hora e os efeitos dia-hora.

Em Lu, Chang, Chen, Chiu e Lee (2009), a previsão do índice da Bolsa de Xangai B-Share é utilizada para comparar as metodologias *MARS* (Splines de Regressão Adaptativa Multivariada), *BPN* (Rede Neural de Retropropagação), *SVM* (M*áquina de* Vetores de Suporte) (*CORTES; VAPNIK, 1995).*) e *MLR* (Regressão Linear M*últipla*) (XIN, 2009).Os resultados obtidos mostraram que o modelo *MARS* fornece melhores previsões em termos de erro e de precisão do que os outros, com uma taxa de erro de 1,15% e uma precisão direcional (*DA*) de 82%.

Guresen, Kayakutlu e Daim (2011) observaram que na maioria dos casos, os modelos de redes neurais permitem obter melhores resultados do que outros métodos. Os dados utilizados correspondem aos valores diários do índice Nasdaq de 7 de Outubro de 2008 a 26 de Junho de 2009. Os modelos que foram comparados neste trabalho são o Perceptron Multicamada (*MLP*) (ROSENBLATT, 1958), Rede Neural Artificial Dinâmica (*DAN2*) (VELÁSQUEZ-HENAO, 2012) e um modelo híbrido de redes neurais e *Garch*. O desempenho dos modelos foi avaliado usando-se o Erro Quadrático Médio (*MSE*) e o Desvio Médio Absoluto (*MAD*), obtendo-se que o modelo clássico *MLP* excede os outros, obtendo melhores resultados.

Outra forma de fazer uma previsão seria utilizando um sistema híbrido, ou seja, combinando modelos lineares como os já apresentados anteriormente com redes neurais. Na previsão da bolsa de valores muitos autores fizeram combinações de métodos ou modelos de previsão procurando incorporar as vantagens de cada um dos modelos anteriores no método híbrido.

Kim e Han (2000) expressam que existe uma grande quantidade de estudos que incluem modelos de Redes Neurais Artificiais (RNAs). No entanto, as RNAs têm limitações na aprendizagem de padrões por causa do fato de os dados do mercado bolsista terem uma dimensionalidade complexa e um grande ruído. Usando o algoritmo genético (*GA*) é possível selecionar o tipo de rede neural de tal forma que a característica relevante do subconjunto possa ser optimizada. *GA* concentra-se, neste trabalho, na discretização dos dados, simplificando assim o processo de aprendizagem para as RNAs e reduzindo o ruído e os dados redundantes.

Pai e Lin (2005) propõem uma metodologia híbrida entre *ARIMA* e *SVM.* Este último é uma nova técnica de rede neural que tem sido aplicada com sucesso na resolução de problemas de estimativa de regressão não linear. Esta metodologia é aplicada a problemas de previsão de preços de ações, alcançando resultados promissores. O modelo apresentado melhora muito o desempenho da previsão do preço das ações do modelo *ARIMA* e do modelo *SVM* individualmente, uma vez que tanto em teoria como empiricamente, a hibridação de dois modelos diferentes reduz os erros de previsão.

Parisi, Parisi e Diaz (2006) utilizaram modelos dinâmicos multivariados construídos a partir de algoritmos genéticos e modelos de redes neurais para prever o sinal de variações semanais nos índices bolsistas asiáticos. O sinal da projeção foi comparado com a variação observada em cada i-ésima semana, obtendo-se que os modelos multivariados com algoritmos genéticos são mais robustos e permitem obter melhores índices de rentabilidade do que os modelos construídos com redes neurais, pelo que por meio desta técnica o investidor pode tomar posições em ativos mais voláteis, comprando-os quando se encontram na parte inferior do ciclo básico de evolução de preços e vendendo-os quando se encontram na parte superior.

Roh (2007) realizou um estudo no qual utiliza o teste *ADF* (Dickey-Fuller Aumentado) para verificar a estabilidade e o teste *ARCH LM* para verificar a heterocedastidade dos

dados do índice Kospi 200 da Coreia. Depois, é feita uma comparação do poder preditivo de diferentes modelos individuais tais como *EWNA*, *Garch, Egarch* e RNAs, e modelos híbridos, obtendo como resultado que o erro médio absoluto (*MSE*) foi menor para os híbridos *NN-Garch* e *NN-Egarch*, o que nos permite concluir que os modelos de RNAs juntamente com modelos de séries temporais podem melhorar o poder preditivo em termos de direção e de precisão.

Yudong e Lenan (2009), por outro lado, propõem que se as redes neurais *feedforward* usando o algoritmo *backpropagation* tenham sido utilizadas para prever índices, neste trabalho, são incorporadas com Optimização da Quimiotaxia Bacteriana Melhorada (*IBCO*) (MULLER, 2002), os dados utilizados são os do índice S&P 500. O Erro Quadrático Médio (*MSE*) diminui consideravelmente, e o tempo de treinamento da rede foi menor do que o modelo *BP* individualmente. O modelo *IBCO-BP* oferece menos complexidade computacional, maior precisão na previsão e menos tempo de treino.

El-Henawy *et al.* (2010) usam redes neurais Perceptron Multicamadas (*MLP*) para prever o índice Kospi 200 (índice de preços de ações da Coreia) ao longo de um período de onze anos. Para melhorar a sua arquitetura, parâmetros, e aumentar a precisão das previsões e diminuir o tempo de treino, são utilizados três algoritmos: Recozimento Simulado mais conhecido como *Simulated Annealing* (*SA*) (KIRKPATRICK, 1983), Algoritmo Genético (*GA*) e um híbrido que combina os dois anteriores. Os resultados mostram que o melhor algoritmo é o *SA*, que excede a abordagem híbrida em 30% de precisão, e 40% ao algoritmo genético. *SA* requer 7 minutos de treinamento, *GA* 73 minutos e a abordagem híbrida 98 minutos.

Boyacioglu e Avci (2010) confirmam que os retornos do mercado de ações podem ser previstos via desempenho passado e de variáveis macroeconômicas e financeiras. Prever os retornos das ações é uma tarefa complexa devido ao grande número de fatores envolvidos no mercado de ações. Isto torna as séries de preços de ações dinâmicas, não lineares, complicadas e caóticas. Este artigo utiliza o modelo *ANFIS*, que combina a teoria da rede neural e a lógica *fuzzy* utilizando variáveis que compreendem outros índices bolsistas e variáveis macroeconômicas, o índice de preços no consumidor, a produção industrial, a taxa de câmbio do dólar, etc. O modelo obtido tem um R-quadrado do 98%, o que significa que a *ANFIS* prevê com um elevado grau de certeza o índice da Bolsa de Valores de Istambul.

Wang, Cheng e Hsu (2010) incorporam a cadeia Markov no modelo estocástico difuso e utilizam dados do índice da Bolsa de Valores de Taiwan. Este modelo é capaz de considerar, simultaneamente as taxas de câmbio, o aumento das probabilidades e as quedas dos índices bolsistas. Dos 330 ensaios realizados durante a experiência de três meses, o modelo foi significativamente melhor em 298 deles.

Yu e Huarng (2010) procuraram aplicar redes neuronais para implementar um novo modelo de série temporal difusa que melhora as previsões e inclui os vários graus de pertença no estabelecimento de relações difusas que ajudam na captura das relações mais apropriadas. Estas relações difusas são utilizadas para prever o índice da Bolsa de Valores

de Taiwan.

De acordo com Cheng, Chen e Wei (2010), foram encontrados dois inconvenientes em muitos dos modelos de previsão do passado: 1) os pressupostos estatísticos sobre variáveis que são necessárias para modelos de séries temporais, tais como: *ARMA* e *ARCH* para modelos de previsão de equações matemáticas, e estes não são facilmente compreendidos pelos investidores em ações; 2) as regras extraídas de alguns algoritmos de inteligência artificial (*IA*), tais como redes neurais, não são facilmente realizadas.

Para superar estes inconvenientes, é proposto um modelo de previsão híbrido, utilizando indicadores multitécnicos para prever as tendências dos preços das ações. Além disso, inclui quatro procedimentos propostos no modelo híbrido a fim de fornecer regras eficazes de previsão, que foi desenvolvido a partir das regras extraídas da teoria de conjuntos aproximados (*RST*): 1) selecionar indicadores técnicos chave; 2) utilizar a Abordagem de Distribuição de Probabilidade Cumulativa (*CPDA*) (CHUNG-HO, 2010).; 3) utilizar um algoritmo *RST* (LUPU, 2008) para extrair regras linguísticas do conjunto de dados de indicadores técnicos linguísticos; 4) utilizar algoritmos genéticos (*GA*) para refinar as regras extraídas para uma melhor precisão de previsão. A eficácia do modelo proposto é verificada por dois tipos de avaliações de desempenho: precisão e valores de retorno, e utilizando um período de seis anos do índice Taiex de Taiwan como conjunto de dados de teste. Os resultados experimentais mostram que o modelo proposto é superior aos modelos de previsão, a teoria do conjunto aproximado (*RST*) e o algoritmo genético em termos de precisão, e as avaliações de desempenho da bolsa revelaram que os benefícios produzidos pelo modelo proposto são superiores aos modelos comprar e manter (*buy and hold*), *RST* e *GAS*. (CHENG; CHEN; WEI, 2010).

Shen *et al.* (2011) selecionaram uma rede neural do tipo Função de Base Radial (*RBF*) para prever os índices bolsistas da Bolsa de Xangai. A fim de otimizar a rede e aumentar a eficiência das previsões, é utilizado o Algoritmo de Enxame de Peixes Artificial (*AFSA*). Os resultados do *RBF* otimizado com *AFSA*, Algoritmo Genético (*GA*) (HOLLAND, 1992) e Optimização por enxame de partículas (*PSO*) (KENNEDY,1995) são tão bons como as previsões feitas com *ARIMA*, *Backpropagation* (BP) ou Máquina de Vetores de Suporte (*SVM*), apresentando o *RBF* com *AFSA* não a mais alta precisão, mas sendo um novo algoritmo inteligente é bem-sucedido em aumentar o resultado das previsões da rede original da Função de Base Radial (*RBF*). (SHEN *et al.*, 2011).

Wang *et al.* (2011) explicam que, devido à variedade de fatores que afetam o mercado de ações, é proposta a utilização do algoritmo *Wavelet De-noising Backpropagation* (*WDBP*); os dados utilizados correspondem aos do índice da Bolsa de Valores de Xangai de Janeiro de 1993 a Dezembro de 2009. O modelo *WDBP* foi comparado com um modelo *Backpropagation*, resultando o *WDBP* superior na precisão das previsões.

A previsão da bolsa de valores é uma das questões mais importantes no campo financeiro. Portanto, propõem um modelo chamado Algoritmo Genético/ Optimização por

Enxame de Partículas (*GA*/*PSO*), que será avaliado usando-se índices como o Nasdaq100, Dow Jones e o S & P500. A rede neural utilizada como preditor é a Rede Neural Recorrente de Sigmoide Diagonal (*SDRNN*), porque a sua arquitetura diminui o erro e aumenta a precisão em muitas aplicações. (ABOUELDAHAB; FAKHRELDIN, 2011).

Asadi *et al.* (2012) propõem um modelo híbrido que é uma combinação de métodos de pré-processamento de dados, algoritmos genéticos e algoritmos Levenberg-Marquardt (LM) (LEVENBERG, 1944), utilizados para a aprendizagem da alimentação de redes neurais na previsão da taxa de ações. Também utilizam informação de métodos de pré-processamento, tais como transformação de dados e seleção de variáveis de entrada para melhorar a precisão do modelo. A competência do método proposto é testada com a sua aplicação para prever alguns índices de ações utilizados na literatura. Os resultados mostram que o método proposto é capaz de lidar com as flutuações nos valores das existências e também obtém uma boa precisão preditiva. Portanto, pode ser utilizado para modelar relações complexas entre entradas e saídas ou para encontrar padrões nos dados enquanto se faz a previsão financeira.

Wang *et al.* (2012) apresentam o modelo híbrido (*PHM*), que é uma combinação do *ARIMA*, Modelo de Alisamento Exponencial (*ESM*) e uma Rede Neural *Feedforward* (*FNN)* usando o algoritmo *backpropagation*, que permite capturar características lineares e não lineares ao longo de uma série temporal. Para testar o modelo, foram utilizados dados mensais do índice SZII da China e o índice Dow Jones *Industrial Average Index* (DJIAI-USA). A Previsão Direcional (*AD*) é utilizada para avaliar a exatidão das previsões. Os resultados obtidos mostram que o modelo *PHM* híbrido proporciona melhores resultados em termos de erro e precisão do que outros modelos como *ARIMA*, *ESM* e *FNN* por causa da sua robustez.

Dai, Wu e Lu (2012) propõem um modelo de previsão de séries cronológicas combinando análises não lineares de componentes independentes e redes neurais para prever os índices bolsistas asiáticos. Exemplos representativos são o Nikkei 225 e o Shangai B Share. Os resultados experimentais mostram que o modelo de previsão proposto não só melhora a precisão da previsão da abordagem da rede neural, mas também excede os três métodos de comparação com precisões superiores a 80%.

Muitos analistas acreditam que os movimentos que ocorrem na bolsa de valores estão intimamente ligados ao comportamento da economia do país onde opera, pelo que existem algumas variáveis que podem influenciar a bolsa de valores pública: crescimento econômico, taxas de juros, o preço do dólar, produção nacional, preços do petróleo, comportamento da inflação, desemprego, entre outras variáveis da macroeconomia de um país.

Pierdzioch, Dopke e Hartmann (2008) comparam previsões de mercados bolsistas voláteis com base em dados macroeconômicos em tempo real e dados macroeconômicos revistos. Para tal são utilizados dois critérios estatísticos, um baseado na utilidade e o outro nas opções. O principal resultado é que o valor estatístico e econômico das previsões baseadas em dados macroeconômicos em tempo real é comparável ao valor estatístico e

econômico das previsões baseadas em dados macroeconômicos revistos.

Cai, Chou e Li (2009) publicam um estudo no qual investigam as correlações dinâmicas entre alguns índices bolsistas internacionais e a inflação. Utilizam um modelo de série temporal autorregressivo chamado (*DSTCC-CARR*), que revela como as correlações são significativamente variáveis ao longo do tempo e como estão relacionadas com flutuações cíclicas nas taxas de inflação e volatilidade do mercado. Os índices internacionais utilizados são os da França, Alemanha, Rússia, Hong Kong, Japão e Estados Unidos, e os níveis de correlação foram significativos em 95%. As correlações mais elevadas ocorrem quando os países se encontram numa fase de contração e as mais baixas quando se encontram numa fase de expansão.

Chen (2009) sugere que as variáveis macroeconômicas servem para prever recessões no mercado de ações dos EUA (o índice de preços *Standard & Poor's* (S & P 500)) (referência), especialmente os diferenciais de rendimento das curvas e as taxas de inflação são os indicadores mais úteis; isto foi concluído após a utilização de métodos paramétricos e não paramétricos para identificar períodos de recessão no mercado de ações e considerando tanto dentro como fora da amostra, testes de capacidade de previsão das variáveis.

Majhi *et al.* (2009) propõem a previsão de índices bolsistas utilizando a Optimização da Forragem Bacteriana Adaptativa (*ABFO*) e Optimização da Forragem Bacteriana (*BFO*), a estrutura utilizada nestes modelos de previsão é um simples combinador linear. Os novos modelos são computacionalmente mais eficientes, com uma previsão mais precisa, e mostram uma convergência mais rápida em comparação com outros modelos computacionais evolutivos, tais como o algoritmo genético.

Gençtürk, Çelik e Binici (2012) descobriram que não só a relação entre as variáveis macroeconômicas e a bolsa de valores é importante, mas também que as ligações causais entre as relações de curto e longo prazo são importantes. As variáveis macroeconômicas tais como a taxa de juros, a taxa de câmbio e o índice de preços no consumidor afetam as decisões dos investidores. Foi utilizado um modelo *VECM*, com dados da Bolsa de Valores turca, com o qual se obteve que não existe uma relação a longo prazo entre o índice da Bolsa de Valores turca e o índice de preços ao consumidor, a taxa de juros e a taxa de câmbio do dólar, mas existe entre o índice e a produção industrial, o que leva a concluir que a produção industrial é um forte fator de previsão da Bolsa de Valores turca.

Caldas e Pires (2012) forneceram provas empíricas sobre a influência das variáveis macroeconômicas e do risco-país no principal índice da bolsa de valores Brasileiro (IBOVESPA). As provas práticas foram obtidas com a aplicação de Quadrados Mínimos Ordinários (*OLS*), o Método de Generalização de Momentos (*GMM*) e sistemas *GMM*. Os resultados mostram que a política monetária e a gestão da dívida pública, bem como a credibilidade e a reputação, afetam o risco país e o desempenho do mercado bolsista brasileiro.

Como conclusão podemos dizer que existem muitos modelos e métodos que têm

sido utilizados nos últimos tempos para prever índices bolsistas em países de todo o mundo. Os primeiros modelos eram autorregressivos, conhecidos como *ARIMA*, que simplesmente captavam as características lineares do mercado bolsista e a sua vantagem reside no facto de não exigirem diferentes séries de dados, implicando uma poupança na especificação e identificação do modelo no sentido da econometria tradicional, mas devido ao grande número de relações não lineares entre os dados foi necessário implementar modelos não lineares e não paramétricos.

Depois, a fim de melhorar a precisão das previsões, foram introduzidos modelos híbridos que agrupavam as vantagens dos dois ou mais modelos envolvidos. Em particular, a descoberta da influência de variáveis macroeconômicas em algumas bolsas de valores do mundo impulsionou a concepção de modelos que utilizam tais variáveis como dados de entrada para prever índices bolsistas, provando ser muito eficazes.

Isto não significa que modelos autorregressivos como *ARIMA* ou *Garch* sejam obsoletos, mas sim que devido à sua estrutura não podem captar as características não lineares presentes nas séries cronológicas financeiras, tais como as séries de índices de ações, tornando necessário combinar estes métodos com outros que possam modelar tais características e melhorar as previsões.

Este caminho deixou como resultado uma longa lista de métodos para prever o comportamento da bolsa de valores ou das ações individuais da empresa. É necessário continuar a propor e a adaptar os métodos de previsão às necessidades, aos contextos, às características dos índices bolsistas, de modo a obter previsões mais precisas, minimizando o risco do investidor. (CECILIA-GARCÍA, *et al.*, 2013).

3 | REDES NEURAIS UTILIZADAS

3.1 *Feedforward Neural Network*(FNN)

Estas redes são um tipo de rede de aprendizagem supervisionada e funcionam, basicamente, aplicando um padrão de entrada à rede, que se propaga desde a primeira camada por meio das camadas superiores da rede até gerar uma saída. (GUEVARA-DÍAZ, 2007).

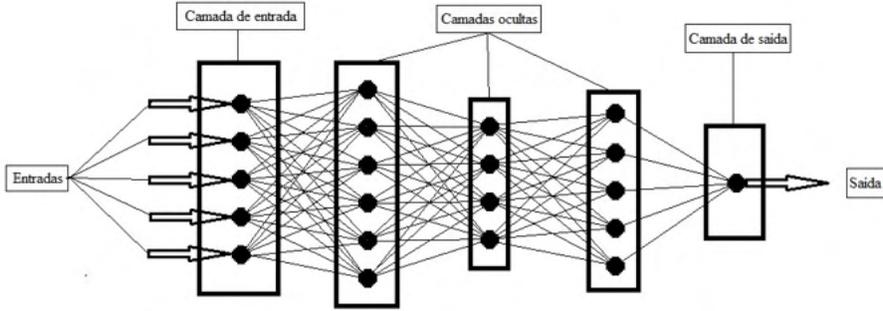



Figura 1- Arquitetura do *Feedforward*

Fonte: Elaboração própria.

A equação matemática da arquitetura da Figura 1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$y = f^0\left(\sum_{j=1}^{k} w_j^o f_j^h\left(\sum_{i=1}^{n} w_{ji}^h x_i\right)\right) \quad (1)$$

Onde $\boldsymbol{y}$ é a saída, $\boldsymbol{f^0}$ é a função de activação na camada de saída e $\boldsymbol{f^h}_j$ é uma função de activação na camada oculta e se um viés é adicionado à camada de entrada e a função de activação de cada neurónio na camada oculta é $\boldsymbol{f^h}$, então a equação (1) torna-se:

$$y = f^0\left(w^b + \sum_{j=1}^{k} w_j^o f^h\left(w_j^b \sum_{i=1}^{n} w_{ji}^h x_i\right)\right) \quad (2)$$

Onde w^b é o peso do enviesamento à saída e w^b_j é o peso do enviesamento à camada oculta. (WARSITO; SANTOSO, 2018)

Neste caso o tipo de algoritmo de treinamento usado foi o Levenberg-Marquardt *Backpropagation* (*LMBP*) (MARQUARDT, 1963) que é um dos algoritmos supervisionados mais rápidos e é altamente recomendado, embora exija mais memória computacional que outros algoritmos.

O algoritmo Levenberg-Marquardt é uma variação do método de Newton que foi concebido para minimizar funções que são somas de quadrados de outras funções não lineares. Isto é bem adequado para o treino de redes neurais, onde o índice de desempenho é o erro quadrático médio (*MSE*). Considerando-se a forma do método de Newton em que o índice de desempenho é uma soma de quadrados. O método de Newton para otimizar um índice de desempenho ***F(x)*** é:

$$x_{k+1} = x_k - A_k^{-1} g_k, \quad (3)$$

onde $A_k \equiv \nabla^2 F_{(x)} \rrbracket x{=}_{x_k}$ e gk $\equiv \nabla F_{(x)} \rrbracket x{=}_{x_k}$

Assumindo-se que F(x) é uma função de soma de quadrados:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2(x) = v^T(x) v(x) \quad (4)$$

então o j-ésimo elemento do gradiente seria:

$$[\nabla F(x)]_j = \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} = 2\sum_{i=1}^{N} v_i(x)\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} \quad (5)$$

Portanto o gradiente pode ser escrito em forma de matriz:

$$\nabla F(x) = 2J^T(x)v(x) \quad (6)$$

Onde

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_N(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial v_N(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_N(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

é a matriz Jacobiana.

A seguir mostra-se a matriz Hessiana. Os elementos ***j*** é ***k*** da matriz de Hessiana seriam:

$$[\nabla^2 F(x)]_{k,j} = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k \partial x_j} = 2\left\{\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_k}\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} + v_i(x)\frac{\partial^2 v_i(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right\} \quad (8)$$

A matriz Hessiana pode então ser expressa em forma de matriz:

$$\nabla^2 F(x) = 2J^T(x)J(x) + 2S(x) \quad (9)$$

Onde

$$S(x) = \sum_{i=1}^{N} v_i(x)\nabla^2 v_i(x) \quad (10)$$

Considerando-se o valor de ***S(x)*** pequeno, podemos aproximar a matriz Hessiana como:

$$\nabla^2 F(x) \cong 2J^T(x)J(x) \quad (11)$$

Então se substitui-se a Equação (11) e Equação (6) na Equação (3), é obtido o método Gauss-Newton:

$$x_{k+1} = x_k - [2J^T(x_k)J(x_k)]^{-1} 2J^T(x_k)v(x_k)$$

$$= x_k - [J^T(x_k)J(x_k)]^{-1} J^T(x_k)v(x_k) \quad (12)$$

Pode-se observar que a vantagem de Gauss-Newton em relação ao método padrão de Newton é que não requer o cálculo de segundas derivadas.

Um problema com o método Gauss-Newton é que a matriz ***H = J^T J*** não pode ser invertível. Isto pode ser ultrapassado através da seguinte modificação da matriz Hessiana

aproximada:

$$G = H + \mu I \qquad (13)$$

Para ver como esta matriz pode ser invertida, suponha que os valores próprios e os vectores próprios de ***H*** são {$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2} ... \boldsymbol{\lambda_n}$} e {$\boldsymbol{z_1, z_2} ... \boldsymbol{z_n}$}. Então:

$$Gz_i = [H + \mu I]z_i = Hz_i + \mu z_i = \lambda_i z_i + \mu z_i = (\lambda_i + \mu)\, z_i \qquad (14)$$

Portanto, os autovetores de ***G*** são os mesmos que os autovetores de ***H***, e os autovalores de ***G*** são $\boldsymbol{\lambda_i + \mu}$.***G*** pode ser definido como positivo aumentando $\boldsymbol{\mu}$ até $(\boldsymbol{\lambda_i + \mu}) > 0$ para todos os valores de ***i*** e por tanto a matriz será invertível

Isto leva ao algoritmo Levenberg-Marquardt:

$$x_{k+1} = x_k - [J^T(x_k)J(x_k) + \mu_k I]^{-1} J^T(x_k)v(x_k) \qquad (15)$$

ou

$$\Delta x_k = -[J^T(x_k)J(x_k) + \mu_k I]^{-1} J^T(x_k)v(x_k) \qquad (16)$$

Este algoritmo tem a característica muito útil de, à medida que o $\boldsymbol{\mu_k}$ é aumentado, aproxima-se do algoritmo de descida mais acentuado com uma pequena taxa de aprendizagem:

$$x_{k+1} \equiv x_k - \frac{1}{\mu_k} J^T(x_k)v(x_k) = x_k - \frac{1}{2\mu_k} \nabla F(x) \qquad (17)$$

para uma $\boldsymbol{\mu_k}$ grande, enquanto à medida que $\boldsymbol{\mu_k}$ é reduzido a zero, o algoritmo se torna Gauss-Newton.

O algoritmo começa com $\boldsymbol{\mu_k}$ definido para algum valor pequeno (por exemplo, $\boldsymbol{\mu_k} = 0{,}01$). Se um passo não render um valor menor para ***F(x)***, então o passo é repetido com multiplicado por algum fator $\boldsymbol{\vartheta} > 1$ (por exemplo, $\boldsymbol{\vartheta} = 10$). Eventualmente ***F(x)*** deve diminuir, pois estaríamos dando um pequeno passo na direção da descida mais íngreme. Se um passo produzir um valor menor para ***F(x)***, então $\boldsymbol{\mu_k}$ é dividido por $\boldsymbol{\vartheta}$ para o próximo passo, de modo que o algoritmo se aproximará de Gauss-Newton, o que deve proporcionar uma convergência mais rápida. O algoritmo oferece uma boa relação entre a velocidade do método de Newton e a convergência garantida da descida mais íngreme.

A seguir observa-se como aplicar o algoritmo Levenberg-Marquardt ao problema do treinamento em redes multicamadas. Se cada meta ocorrer com igual probabilidade, o erro quadrático médio é proporcional à soma dos erros quadráticos sobre as metas ***Q*** no conjunto de treinamento:

$$F(x) = \sum_{q=1}^{Q} (t_q - a_q)^T (t_q - a_q)$$

$$= \sum_{q=1}^{Q} e_q^T e_q = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{j=1}^{S^M} (e_{j,q})^2 = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \text{ x} \qquad (18)$$

onde $\boldsymbol{e}_{j,q}$ é o elemento $\boldsymbol{j}$ do erro para o par $\boldsymbol{q}$ entrada($\boldsymbol{a}$)/alvo($\boldsymbol{t}$).Eq. (18) é equivalente ao índice de desempenho, Eq. (4), para o qual Levenberg-Marquardt foi projetado. Portanto, deve ser uma questão simples adaptar o algoritmo para o treinamento da rede. Teoricamente isto é verdade, mas requer algum cuidado na elaboração dos detalhes.

A etapa chave no algoritmo Levenberg-Marquardt é o cálculo da matriz Jacobiana. Para realizar este cálculo utiliza-se uma variação do algoritmo *backpropagation*. Lembrando que no procedimento padrão de *backpropagation* calcula-se as derivadas dos erros quadráticos, com respeito aos pesos e enviesamentos da rede. Para criar a matriz jacobiana, precisamos computar as derivadas dos erros, em vez das derivadas dos erros quadráticos.

É uma questão simples, conceitualmente, modificar o algoritmo de *backpropagation* para calcular os elementos da matriz Jacobiana. Infelizmente, embora o conceito básico seja simples, os detalhes da implementação podem ser um pouco complicados.

Antes de apresentarmos o procedimento para o cálculo do jacobiano, vamos dar uma olhada de perto em sua forma (Eq. (7)).

Observe-se que o vetor erro é:

$$v^T = [v_1 \ v_2 \dots v_n] = [e_{1,1} \, e_{2,1} \ \dots \ e_{S^M,1} \, e_{1,2} \ \dots \ e_{S^M,Q}] \qquad (19)$$

o vetor parâmetro é:

$$x^T = [x_1 \ x_2 \dots x_n] = [w_{1,1}^1 \, w_{1,2}^1 \dots \ w_{S^1,R}^1 \, b_1^1 \dots b_{S^1}^1 \, w_{1,1}^2 \dots b_{S^M}^M \ ] \qquad (20)$$

$$N = Q \ X \ S^M$$

e

$$n = S^1(R+1) + S^2(S^1+1) + \cdots + \ S^M(S^{M-1}+1)$$

Portanto, fazendo essas substituições em Eq. (7), a matriz Jacobiana para treinamento em redes multicamadas, pode ser escrita:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{1,1}}{\partial w^1_{1,1}} & \frac{\partial e_{1,1}}{\partial w^1_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial e_{1,1}}{\partial w^1_{S^1,R}} & \frac{\partial e_{1,1}}{\partial b^1_1} & \cdots \\ \frac{\partial e_{2,1}}{\partial w^1_{1,1}} & \frac{\partial e_{2,1}}{\partial w^1_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial e_{2,1}}{\partial w^1_{S^1,R}} & \frac{\partial e_{2,1}}{\partial b^1_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial e_{S^M,1}}{\partial w^1_{1,1}} & \frac{\partial e_{S^M,1}}{\partial w^1_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial e_{S^M,1}}{\partial w^1_{S^1,R}} & \frac{\partial e_{S^M,1}}{\partial b^1_1} & \cdots \\ \frac{\partial e_{1,2}}{\partial w^1_{1,1}} & \frac{\partial e_{1,2}}{\partial w^1_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial e_{1,2}}{\partial w^1_{S^1,R}} & \frac{\partial e_{1,2}}{\partial b^1_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} . \quad (21)$$

Os termos nesta matriz jacobiana, podem ser computados por uma simples modificação no algoritmo de *backpropagation*.

O algoritmo *backpropagation* padrão calcula termos como:

$$\frac{\partial F'(x)}{\partial x} = \frac{\partial e_q^T e_q}{\partial x_1} \quad (22)$$

Para os elementos da matriz Jacobiana necessários para o algoritmo Levenberg-Marquardt, precisa-se calcular termos como:

$$[J]_{h,l} = \frac{\partial v_h}{\partial x_1} = \frac{\partial e_{k,q}}{\partial x_1} \quad (23)$$

Utilizam-se as seguintes derivadas que também são usadas no *backpropagation* padrão:

$$\frac{\partial F'}{\partial w^m_{i,j}} = \frac{\partial F'}{\partial n^m_i} \times \frac{\partial n^m_i}{\partial w^m_{i,j}} \quad (24)$$

onde o primeiro termo do lado direito foi definido como a sensibilidade:

$$s^m_i \equiv \frac{\partial F'}{\partial n^m_i} \quad (25)$$

No processo *backpropagation* calculou as sensibilidades através de uma relação de recorrência desde a última camada para trás até a primeira camada. Pode-se usar o mesmo conceito para calcular os termos necessários para a matriz Jacobiana (Eq.(21)) se define-se uma nova sensibilidade Marquardt:

$$s^{\sim m}_{i,h} \equiv \frac{\partial v_h}{\partial n^m_{i,q}} = \frac{\partial e_{k,q}}{\partial n^m_{i,q}} \quad (26)$$

onde, a partir de Eq. (19), $h = (q - 1)S^M + k$

Agora podemos computar elementos do Jacobiano por:

$$[J]_{h,l} = \frac{\partial v_h}{\partial x_1} = \frac{\partial e_{k,q}}{\partial w_{i,j}^m} = \frac{\partial e_{k,q}}{\partial n_{i,q}^m} \times \frac{\partial n_{i,q}^m}{\partial w_{i,j}^m} = s_{i,h}^{\sim m} \times \frac{\partial n_{i,q}^m}{\partial w_{i,j}^m} = s_{i,h}^{\sim m} \times a_{j,q}^{m-1} \quad (27)$$

ou se x_1 é um enviesamento:

$$[J]_{h,l} = \frac{\partial v_h}{\partial x_1} = \frac{\partial e_{k,q}}{\partial b_i^m} = \frac{\partial e_{k,q}}{\partial n_{i,q}^m} \times \frac{\partial n_{i,q}^m}{\partial b_i^m} = s_{i,h}^{\sim m} \times \frac{\partial n_{i,q}^m}{\partial b_i^m} = s_{i,h}^{\sim m} \quad (28)$$

Para as sensibilidades Marquardt na camada final, se tem que:

$$s_{i,h}^{\sim M} = \frac{\partial v_h}{\partial n_{i,q}^M} = \frac{\partial e_{k,q}}{\partial n_{i,q}^M} = \frac{\partial (t_{k,q} - a_{k,q}^M)}{\partial n_{i,q}^M} = -\frac{\partial a_{k,q}^M}{\partial n_{i,q}^M}$$

$$= \begin{cases} -\dot{f}^M(n_{i,q}^M) & \text{for } i = k \\ 0 & \text{for } i \neq k \end{cases} . \quad (29)$$

Portanto, quando a entrada $\boldsymbol{p}_q$ foi aplicada à rede e a saída de rede correspondente $\boldsymbol{a}^M{}_q$ foi computada, o *backpropagation* Levenberg-Marquardt é inicializado com:

$$S'^M_q = -\dot{F}^M(n_q^M) \quad (30)$$

Cada coluna da matriz $\boldsymbol{S}'^M{}_q$ deve ser retropropagada através da rede para produzir uma fila da matriz Jacobiana. As colunas também podem ser retropropagadas em conjunto, utilizando:

$$S'^m_q = \dot{F}^m(n_q^m)(W^{m+1})^T S'^{m+1}_q \quad (31)$$

As matrizes totais de sensibilidade Marquardt para cada camada são então criadas através do aumento das matrizes calculadas para cada entrada:

$$S'^m = [S'^M_1 | S'^M_2 | \ldots | S'^m_Q] \quad (32)$$

Note que para cada entrada que é apresentada à rede, retropopagam-se os vetores ***S*** de sensibilidade. Isto é porque calcula-se as derivadas de cada erro individual, em vez da derivada da soma dos quadrados dos erros. Para cada entrada aplicada à rede, haverá ***S*** erros (um para cada elemento da saída da rede). Para cada erro, haverá uma linha da matriz Jacobiana.

Após as sensibilidades terem sido retropropagadas, a matriz jacobiana é computada usando Eq. (27) e Eq. (28).

As iterações do algoritmo Levenberg-Marquardt *Backpropagation* (*LMBP*) podem ser resumidas como se segue:

1. Apresentar todas as entradas na rede e calcular as saídas de rede correspondentes e os erros $\boldsymbol{e}_q = \boldsymbol{t}_q - \boldsymbol{a}^M{}_q$. Calcular a soma dos erros quadrados sobre todas as entradas ***F(x)***, usando Eq. (18).

2. Calcule a matriz Jacobiana, Eq. (21). Calcular as sensibilidades com as relações de recorrência Eq. (31), após inicializar com Eq. (30). Aumentar as matrizes individuais para as sensibilidades Marquardt usando Eq. (32). Calcular os elementos da matriz Jacobiana com Eq. (27) e Eq. (28).

3. Resolver a Eq. (16) para obter Δ_{x_k}

4. Recalcular a soma dos erros quadrados usando $\boldsymbol{x_k}+\boldsymbol{\Delta_{x_k}}$. Se esta nova soma de quadrados for menor do que a calculada no passo 1, então divide-se $\boldsymbol{\mu}$ por $\boldsymbol{\vartheta}$, deixe-se $\boldsymbol{x_{k+1}}=\boldsymbol{x_k}+\boldsymbol{\Delta x_k}$ e volte ao passo 1. Se a soma dos quadrados não for reduzida, então multiplica-se $\boldsymbol{\mu}$ por $\boldsymbol{\vartheta}$ e retorna-se ao passo 3

Presume-se que o algoritmo tenha convergido quando a norma do gradiente, Eq. (6), é inferior a algum valor predeterminado, ou quando a soma dos quadrados foi reduzida até ser inferior ao valor de erro objetivo prefixado (HAGAN, 2014).

3.2 *Cascade-Forward Neural Network(CFNN)*

A rede neural *Cascade-Forward* é uma classe de rede neural que é semelhante às redes *Feedforward*, mas cada camada inclui uma conexão a partir da entrada e uma conexão para cada uma das camadas antes dela, pode-se observar estas conexões na Figura 2.

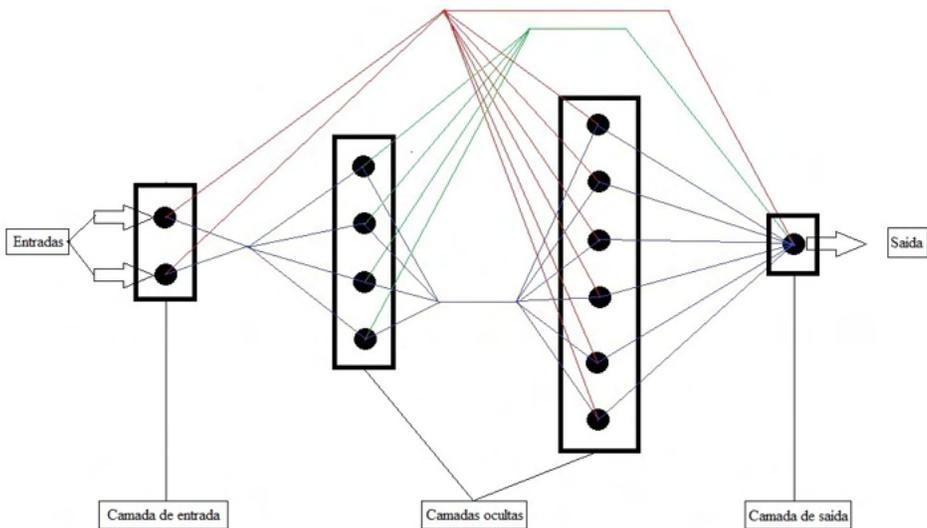



Figura 2 – Arquitetura do *Cascade-Forward*

Fonte: Elaboração própria.

Como nas redes de *Feedforward*, uma rede *Cascade-Forward* de duas ou mais camadas pode aprender qualquer relação finita de entrada-saída. A rede neural *Cascade-Forward* pode ser usada para qualquer tipo de mapeamento de entrada e de saída.

A vantagem deste método é que ele acomoda a relação não linear entre entrada e

saída, não eliminando a relação linear entre os dois.

As equações são formadas do modelo *CFNN* pode ser escrito como se segue:

$$y = \sum_{i=1}^{n} f^i w_i^i x_i + f^o \left(\sum_{j=1}^{k} w_j^o f_j^h \left(\sum_{i=1}^{n} w_{ji}^h x_i \right) \right) \quad (33)$$

Sendo: $\boldsymbol{f^i}$ é a função de ativação da camada de entrada para a camada de saída, $\boldsymbol{w^i_i}$ é o peso da camada de entrada para a camada de saída, $\boldsymbol{f^0}$ é a função de activação na camada de saída e $\boldsymbol{f^h_j}$ é uma função de ativação na camada oculta. Se um bias $\boldsymbol{w_b}$ é adicionado à camada de entrada e a função de ativação de cada neurônio na camada oculta é $\boldsymbol{f^h}$, então, a equação se torna

$$y = \sum_{i=1}^{n} f^i w_i^i x_i + f^o \left(w^b + \sum_{j=1}^{k} w_j^o f_j^h \left(w^b + \sum_{i=1}^{n} w_{ji}^h x_i \right) \right) \quad (34)$$

A Figura 2 mostra que existe uma relação direta entre entrada e saída. A consequência desta forma de relacionamento é que o peso da rede a ser estimado aumenta tanto quanto os neurônios na camada de entrada. Como no *FFNN*, o algoritmo de treinamento é Levenberg-Marquardt *Backpropagation* (*LMBP*). (WARSITO; SANTOSO, 2018)

3.3 Generalized Regression Neural Network(*GRNN*)

GRNN, proposta por Specht (1991), é uma rede capaz de estimar uma variável dependente de uma variável independente através de um conjunto finito de variáveis. Seu tipo de treinamento é supervisionado, tem uma estrutura não recorrente e é realizada numa única apresentação dos padrões de treinamento. Esta rede tem uma estrutura fixa, dada por uma camada de entrada, duas camadas intermédias e uma camada de saída, onde o número de neurônios em cada camada depende do número de padrões de treinamento, entradas e saídas da rede. A sua capacidade de generalização é mantida mesmo com a utilização de dados escassos, e uma vez que se baseia numa função de densidade de probabilidades, as probabilidades de queda para mínimos locais são muito baixas (NIU, 2005).

Esta rede tem sido amplamente utilizada nos últimos anos, principalmente para problemas relacionados com a previsão de séries temporais, tais como cargas elétricas de curto prazo (NIU ,2005) (NOSE-FILHO, 2009) (TRIPATHI, 2008) (XIA, 2010) (YAP, 2006). Foram propostas várias modificações para melhorar a sua capacidade de generalização. No artigo de Niu no 2005, os autores propõem a pesquisa do parâmetro de dispersão usando um algoritmo evolutivo diferencial modificado. O trabalho de Yap no 2006 combina a utilização de redes baseadas na teoria da ressonância adaptativa (*ART*) (GROSSBERG, 2013). com *GRNN.*

A *GRNN* convencional foi programada com o auxílio das toolboxes das RNAs do MATLAB por meio da função *newgrnn*. A regressão consiste em estimar uma variável dependente a partir de uma variável independente por meio de um conjunto finito de variáveis e que pode ser visto na figura 3. Na teoria dos sistemas, a variável dependente corresponde à saída e a variável independente corresponde à entrada e pode ser descrita por meio de

vectores, cujo número de elementos indica o número de entradas e saídas do sistema.

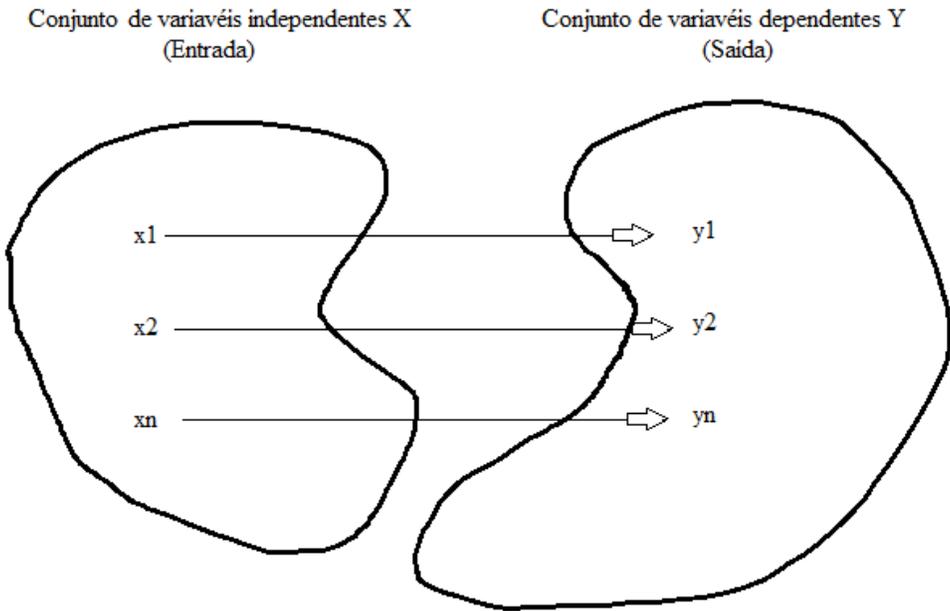



Figura 3 – Conjuntos de variáveis independentes X é conjuntos de variáveis independentes Y

Fonte: Elaboração própria.

Considerando dois conjuntos finitos, *X* e *Y* de variáveis independentes (entradas) e dependentes (saídas) e sendo uma variável de entrada desconhecida, a saída pode ser estimada pela regressão por meio das variáveis contidas nos conjuntos ***X*** e ***Y***, conforme a:

$$E(Y|\hat{x}) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y f(\hat{x},Y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\hat{x},Y)dy} \quad (35)$$

A função densidade de probabilidade $\boldsymbol{f(\hat{x},Y)}$ pode ser obtida por meio dos conjuntos ***X*** e ***Y***. A rede neural de regressão generalizada utiliza como função densidade de probabilidade a estimação de Kernel, também conhecida como janela de Parzen. A estimativa da variável $\boldsymbol{\hat{y}}$ dado uma variável desconhecida $\boldsymbol{\hat{x}}$ pode ser determinada por meio da Eq. (35), sendo ***n*** o número de amostras dos conjuntos ***X*** e ***Y***, a variável dependente associada à independente $\boldsymbol{x_i}$ e $\boldsymbol{a_i}$ o valor da ***i-ésima*** distância euclidiana da variável desconhecida $\boldsymbol{\hat{x}}$ com as variáveis $\boldsymbol{x_i}$, dadas por (Eq. (36)).

$$\hat{y}(\hat{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \exp(\frac{-a_i^2}{2\sigma^2})}{\sum_{i=1}^{n} \exp(\frac{-a_i^2}{2\sigma^2})} \quad (36)$$

$$a_i = (\hat{x} - x_i)^T(\hat{x} - x_i) \quad (37)$$

A função de transferência da *GRNN* é uma função gaussiana dada por Eq. (37). O parâmetro ***σ***, denominado *spread*, define a abertura desta função. A função de transferência utilizada pelo *toolbox* de RNAs do MATLAB é uma função do tipo gaussiana (*radbas*) dada por Eq. (38), ilustrada pela Figura 4.

$$f(a_i) = \exp(\frac{-a_i^2}{2\sigma^2}) \quad (38)$$

$$f(a_i) = \exp(\frac{-0.8326a_i^2}{\sigma^2}) \quad (39)$$

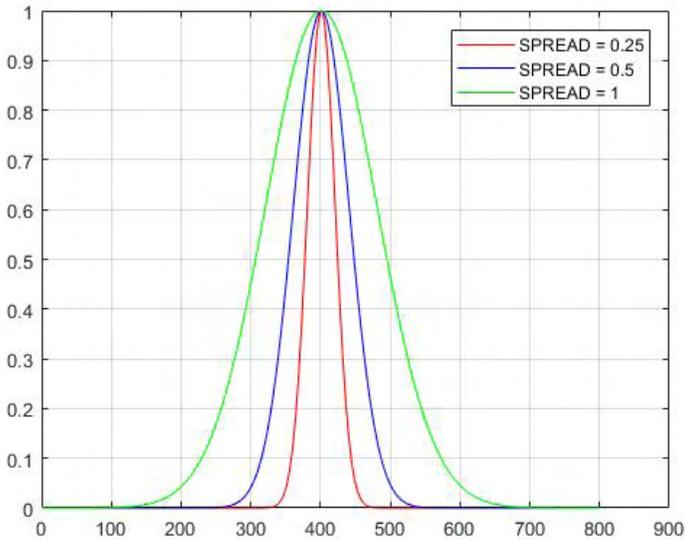



Figura 4 – Valor do parâmetro de dispersão *(Spread)*

Fonte :Elaboração própria.

O valor do parâmetro de dispersão ou *spread* define a área da vizinhança e, consequentemente, o número de padrões a ter em conta para a estimativa de uma variável. Como pode-se observar na Figura 4 quanto maior for o valor do *spread*, maior será a área da vizinhança, e mais padrões serão tidos em conta e quanto mais baixo for este valor, menor será a área da vizinhança, e menos padrões serão tidos em conta. O valor do *spread* está

compreendido entre 0 e 1.

A *GRNN* possui uma estrutura fixa, disposta em quatro camadas, uma de entrada, duas intermediárias e uma de saída, conforme Figura 5.O número de neurônios de cada camada depende exclusivamente do número das entradas, saídas e de amostras do conjunto de dados de treinamento.

O padrão de entrada da rede é representado por um vetor coluna $\hat{X}$ ne-dimensional e o padrão de saída é representado por um vetor coluna $\hat{Y}$, **ns-dimensional**.

O conjunto de dados de treinamento é representado por duas matrizes, uma matriz $X_{ne \times n}$ contendo os padrões de entrada e outra matriz $Y_{ns \times n}$ contendo os padrões de saída. O número **n** de colunas de cada matriz representa a quantidade de amostras do conjunto de dados de treinamento.

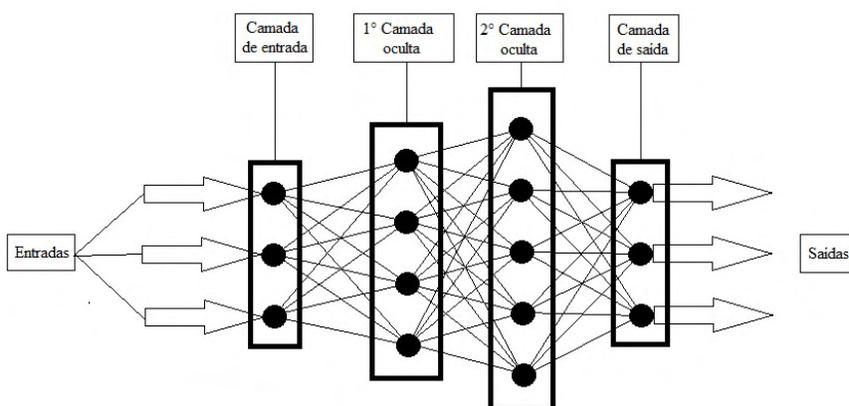



Figura 5 – Arquitetura do *GRNN*

Fonte: Elaboração própria

A camada de entrada da *GRNN* é composta por *ne* neurônios. A primeira intermediária é composta por ***n*** neurônios. A segunda intermediária é composta por ***ns*** neurônios do tipo numerador e um neurônio do tipo denominador. A de saída é composta por ***ns*** neurônios de saída.

O algoritmo de treinamento e o algoritmo de diagnóstico/previsão da *GRNN* podem ser dados pelas seguintes etapas:

Treinamento:

1. Leitura das matrizes ***X*** e ***Y*** e do parâmetro *spread*.

Diagnóstico/Previsão:

1. Leitura do padrão desconhecido $\hat{X}$;
2. Cálculo das distâncias euclidianas, a_i dadas por Eq. (40);

3. Cálculo dos níveis de pertinência, $\boldsymbol{b_i}$ dados por Eq. (41);

4. Cálculo das saídas dos neurônios do tipo numerador, $\boldsymbol{c_j}$ dadas por Eq. (42), e da saída do neurônio do tipo denominador, $\boldsymbol{d}$ dada por Eq. (43);

5. Cálculo das saídas estimadas, $\hat{\boldsymbol{y}}_j$ dadas por Eq. (44);

6. A saída $\hat{\boldsymbol{Y}}$ é dada por Eq. (45).

$$a_i = (\hat{X} - X_i)^T(\hat{X} - X_i), i = 1, \ldots, n \quad (40)$$

$$b_i = \exp\left(\frac{-0.8326a_i^2}{\sigma^2}\right), i = 1, \ldots, n \quad (41)$$

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} y_{j,i} b_i, j = 1, \ldots, ns \quad (42)$$

$$d = \sum_{i=1}^{n} b_i \quad (43)$$

$$\hat{y}_j = \frac{c_j}{d}, j = 1, \ldots, ns \quad (44)$$

$$\hat{Y} = [\hat{y}_1 \ldots \hat{y}_j \ldots \hat{y}_{ns}]^T \quad (45)$$

(NOSE FILHO, 2011).

4 | METODOLOGIAS

No início o plano era utilizar fatores macroeconômicos para a previsão do IBEX 35, mas não se conseguiu obter dados diários, o que resultou em uma quantidade insuficiente de dados para esta pesquisa. Então, decidiu-se abortar esta ideia e começar a usar outros dados, como o valor de fechamento de outros índices de ações estrangeiras, commodities e a taxa de câmbio entre duas moedas. O preço de fechamento de um ativo é o último preço em que ele foi negociado numa sessão da bolsa.

Para calcular o valor do dia seguinte, foi utilizada a conhecida técnica do janelamento (GOUK, 2014), que consiste em inserir como entrada os valores dos dias anteriores ao valor que se precisa determinar. Neste caso, se entrariam com os valores de fechamento dos 5 dias anteriores dos índices de ações estrangeiras, taxas de câmbio e matérias-primas e do mesmo índice IBEX 35.

Para inferir a qualidade da previsão, usa-se o conceito *MAPE*, o qual é consolidado na literatura especializada (PARK *et al.*, 1991):

$$MAPE = \frac{1}{NA} \sum_{h=1}^{NA} \left| \frac{y_{atual}(h) - y_{fprevisto}(h)}{y_{atual}(h)} \right| x\, 100 \quad (46)$$

sendo:

MAPE : *Mean Absolute Percent Error* (percentual do erro absoluto médio).

NA : número da amostragem da série de tempo discreto;

$y_{atual}(h)$: valor de referência (para fins de comparação) relativa ao instante discreto *h*;

$y_{previsto}(h)$: valor previsto referente ao instante discreto *h*.

Considerando que um valor MAPE aceitável deve ser inferior a 20% e um excelente valor inferior a 10%. (GILLILAND, 2010).

4.1 Obtençao das entradas

Os diferentes valores de fechamento dos diferentes índices foram obtidos na seção de finanças do *Yahoo*, que é junto com o *Investing* de uma das páginas mais conceituadas para encontrar dados históricos sobre índices de ações. A partir de ambas as páginas é possível obter dados diários que podem ser facilmente importados em formato Excel.

Ao obter os dados históricos dos diferentes índices bolsistas para usar como entrada, devem-se usar todos eles da mesma página, visto que a princípio estava-se pensando em usar tanto o *Yahoo Finance* quanto o *Investing*, isto porque nestas entidades estavam faltando dados de alguns índices bolsistas. Mas não é recomendável fazer isso porque os valores do *Yahoo* e do *Investing* não podem ser misturados, pois seus valores de fechamento não são os mesmos e os valores de correlação linear entre os índices dão valores errados. Então, deve-se escolher os parâmetros só de uma página. Neste caso particular, foi decidido utilizar o *Yahoo Finance*.

A princípio, os dados históricos foram tomados de janeiro de 2010 a dezembro de 2019 dos mais importantes índices bolsistas do mundo e se comparou sua correlação linear com o índice IBEX 35, descartando aqueles com correlação que considerava baixa, tomando como válidos apenas aqueles cujo valor absoluto de sua correlação linear com o índice IBEX 35 fossem o maior possível.

Portanto, em uma primeira seleção, os índices bolsistas das bolsas estrangeiras escolhidos foram os seguintes 12: AEX (Holanda), BEL 20 (Bélgica), CAC 40 (França), DAX 30 (Alemanha), HANG SENG (Hong Kong), NIKKEI 225 (Japão), OMXS 30 (Suécia), S&P ASX 200 (Austrália) S&P TSX 60 (Canadá), SMI 30 (Suíça), Taiwan Weighted (Taiwan) e o próprio IBEX 35 (Espanha).

Os três seguintes foram selecionados como matérias primas influenciadoras: Milho, Ouro e Prata.

Finalmente, os quatro seguintes índices foram escolhidos como taxas de câmbio: USD/JPY (taxa de câmbio entre o dólar americano e o iene japonês), EUR/CAD (taxa de câmbio entre o euro e o dólar canadense), EUR/AUD (taxa de câmbio entre o euro e o dólar australiano) e EUR/JPY (taxa de câmbio entre o euro e o iene japonês). Dando um total de 19 índices.

Com o propósito de analisar a robustez das redes neurais, verifica-se se as RNAs treinadas com os dados de 2010 a 2019 seriam capazes de prever com precisão os valores de fechamento do ano 2020, que como se sabe foi um ano em que ocorreu a pandemia global e, portanto, o mercado de ações sofreu quedas significativas.

4.2 Procesamento das entradas

Para realizar o processo de previsão do índice IBEX 35, para o dia seguinte, foi usada a técnica de janelamento que já foi descrita anteriormente, que consiste em colocar os dados dos dias anteriores em relação aos dados que se quer conhecer.

Neste caso, foi obtida a previsão usando as redes neurais descritas anteriormente, diferenciando 2 casos:

1. No primeiro caso, foram utilizados como entrada apenas os dados de 5 dias anteriores ao valor do dia do mesmo índice IBEX 35 que quer se conhecer, dando 5 entradas para o cálculo.

2. No segundo caso, foram usados, como dados de entrada, 19 índices que possuem a maior correlação possível com o IBEX 35, considerando-se somente aqueles que possuem correlação. Neste caso, apartam-se somente 6 índices (entre os 19 indicados) que somados ao mesmo IBEX 35 daria um total de 7 índices. Portanto, levando em conta os valores dos 5 dias anteriores, daria um total de 35 entradas. Os 6 índices escolhidos seriam os índices bolsistas Hang Seng (Hong Kong) é BEL 20(Bélgica), as matérias-primas Maiz é Oro e as taxas de câmbio EUR/JPY é EUR/AUD.

A ideia de realizar 2 casos diferentes é ver a diferença de desempenho das previsões quando são colocadas diferentes entradas, nas diferentes redes neurais aplicando três RNAs diferentes.

Finalmente, como mencionado anteriormente, é analisada a robustez das redes neurais já treinadas, verificando como a rede e capaz de prever os valores de fechamento para 2020.

O procedimento consiste simplesmente em simular os valores nas RNA já treinadas dos cinco dias anteriores (janelamento) do ano 2020, do valor do dia de fechamento a ser conhecido.

A robustez será analisada para ambos os casos (caso 1 e caso 2) sendo 5 entradas para o caso 1 e 35 entradas para o caso 2.

5 | RESULTADOS OBTIDOS

Na sequência, são mostradas tabelas de resultados do *MAPE*. A métrica *MAPE* é usada visando quantificar a precisão de uma técnica de previsão comparando-se os valores desejados com os valores calculados. São empregadas, na análise, as três RNAs mencionadas anteriormente: *Feedforward Neural Network (FNN), Cascade-Forward Neural Network (CFNN), e Generalized Regression Neural Network (GRNN).*

Quando são utilizadas o *Feedforward* e o *Cascade-Forward*, são mostrados os diferentes resultados obtidos quando se varia o número de neurônios da camada oculta e sua disposição e, também, quando se muda a porcentagem de treinamento.

Tanto no caso de *Feedforward* como no *Cascade-Forward* foram usados o algoritmo de treinamento *Levenberg-Marquardt Backpropagation* (MARQUARDT, 1963). A função de transferência usada foi a sigmoide tangente hiperbólica.

Quanto às porcentagens de treinamento, foram utilizadas três variantes:

1. 70% de treinamento.
2. 80% de treinamento.
3. 90% de treinamento.

Em relação à distribuição da camada oculta, foram usados dois tipos de distribuição:

1. 1 camada oculta.
2. 3 camadas ocultas.

Quando é utilizada a *GRNN*, também, foram utilizadas três variantes, mas, neste caso, como já foi mencionado anteriormente, tem-se de fazer, manualmente, usando-se uma porcentagem da mostra de dados para treinar.

1. 70% de treinamento.
2. 80% de treinamento.
3. 90% de treinamento.

Quando se usa a *GRNN,* o único parâmetro que foi mudado é a dispersão (*spread*), isto porque o número de neurônios ocultos é igual ao número de amostras do treinamento.

1. *Spread* = 0.1
2. *Spread* = 1.

Nas tabelas a seguir, a célula com o menor valor do *MAPE* em cada linha é registrada na cor vermelha e amostrada em porcentagem. Após cada tabela de resultados, são mostrados os gráficos que comparam, visualmente, a saída desejada (*Target*) em vermelho e a saída calculada pela rede neural (*Output*) em azul, correspondendo, em cada caso, à configuração com valor de *MAPE* menor.

Cada rede neural treinada (com os parâmetros anteriormente referidos), poderia predizer os valores de fechamento do IBEX 35 desde 01/01/2020 até o 30/09/2020. Trata-se dar análise da robustez das RNAs treinadas na predição dos valores de ano 2020, em um ano que por causa da pandemia as bolsas de valores internacionais tiveram muitas flutuações por como consequência da crise global.

5.1 Análise do mape do caso 1

Neste caso, como informado anteriormente, foram usados apenas os dados dos 5 dias anteriores do IBEX 35 como entrada.

5.1.1 Usando a rede neural feedforward

FEEDFORWARD															
INPUT:IBEX 35															
70%															
1 camada oculta							3 camadas ocultas								
Neurônios por camada							Neurônios por camada								
100	150	200	250	300	400	450	7-5-3	2-3-4	8-6-4	16-12-8	48-36-24	6-5-4	4-5-6	3-5-7	4-3-2
1.934	2.189	2.509	1.946	3.223	3.012	3.046	1.667	1.619	1.667	1.855	1.818	13.674	1.669	1.612	1.635

Tabela 1 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Feedforward* para o primeiro caso com a configuração 70% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

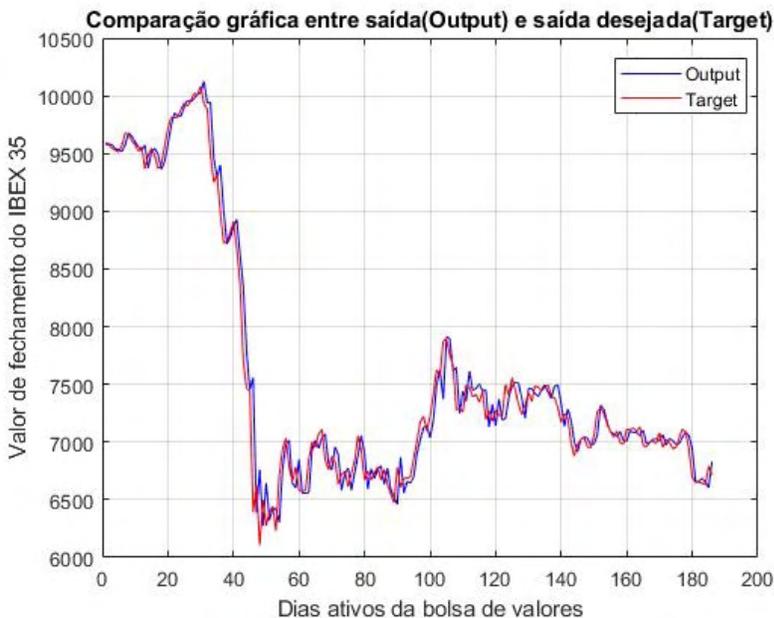



Figura 6 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (3,5,7) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

FEEDFORWARD															
INPUT:IBEX 35															
80%															
1 camada oculta							3 camadas ocultas								
Neurônios por camada							Neurônios por camada								
100	150	200	250	300	400	450	7-5-3	2-3-4	8-6-4	16-12-8	48-36-24	6-5-4	4-5-6	3-5-7	4-3-2
1.898	2.548	2.561	2.463	2.623	4.254	4.044	1.635	1.593	1.633	1.665	1.834	1.988	1.600	1.689	1.605

Tabela 2 - Resultados do *MAPE* da *rede neural Feedforward* para o primeiro caso com a configuração 80% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

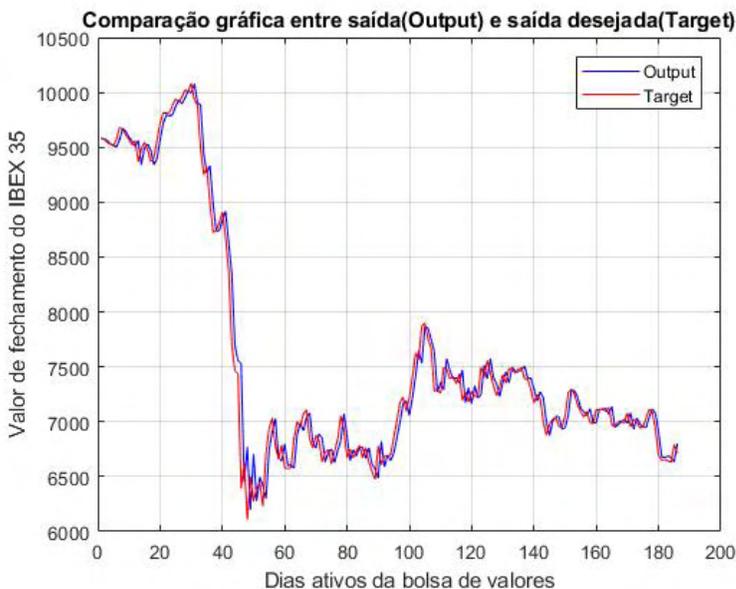



Figura 7 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (2,3,4) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

FEEDFORWARD															
INPUT:IBEX 35															
90%															
1 camada oculta							3 camadas ocultas								
Neurônios por camada							Neurônios por camada								
100	150	200	250	300	400	450	7-5-3	2-3-4	8-6-4	16-12-8	48-36-24	6-5-4	4-5-6	3-5-7	4-3-2
2.116	2.707	9.941	2.860	3.642	2.358	3.268	1.632	1.610	1.664	1.754	2.118	1.922	1.685	3.895	1.645

Tabela 3 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Feedforward* para o primeiro caso com a configuração 90% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

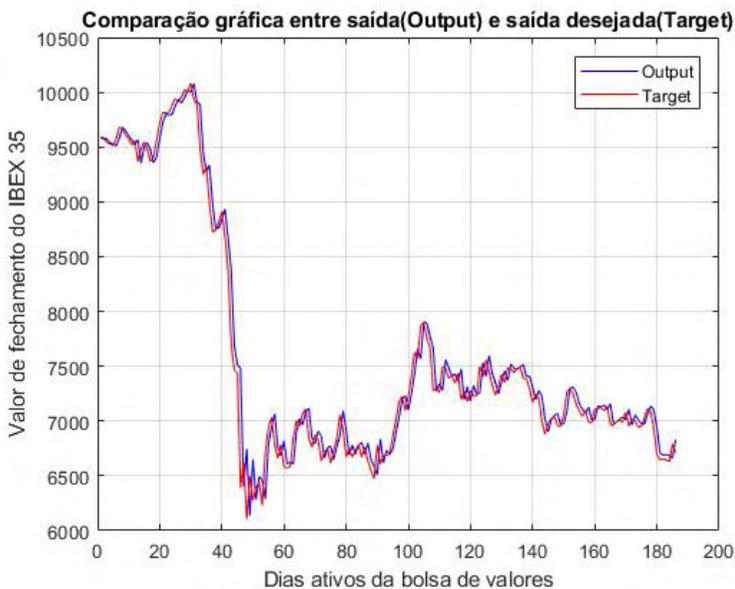



Figura 8 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (2,3,4) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

5.1.2 Usando a rede neural cascade-forward

CASCADE															
INPUT:IBEX 35															
70%															
1 camada oculta							3 camadas ocultas								
Neurônios por camada							Neurônios por camada								
100	150	200	250	300	400	450	7-5-3	2-3-4	8-6-4	16-12-8	48-36-24	6-5-4	4-5-6	3-5-7	4-3-2
2.105	2.413	2.454	2.102	4.011	2.660	3.938	1.789	1.654	1.797	1.649	1.958	1.798	1.799	1.650	1.774

Tabela 4 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Cascade-Forward* para o primeiro caso com a configuração 70% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

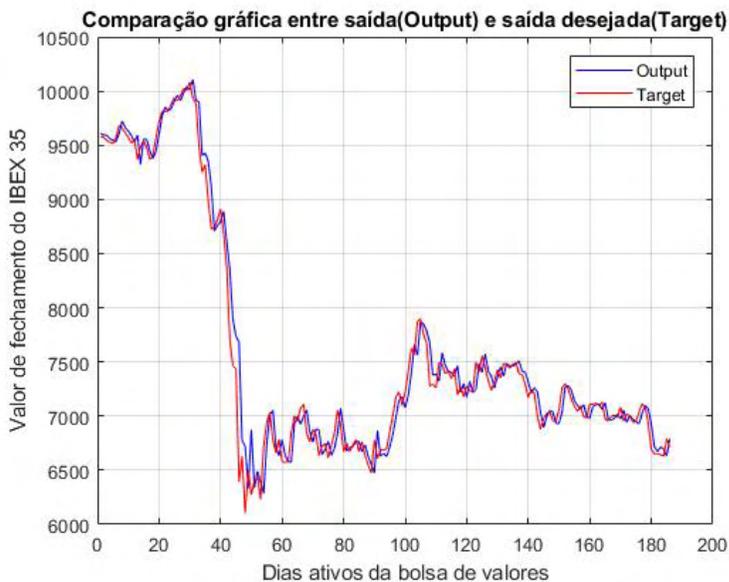



Figura 9 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (16,12,8) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

CASCADE															
INPUT:IBEX 35															
80%															
1 camada oculta							3 camadas ocultas								
Neurônios por camada							Neurônios por camada								
100	150	200	250	300	400	450	7-5-3	2-3-4	8-6-4	16-12-8	48-36-24	6-5-4	4-5-6	3-5-7	4-3-2
2.129	2.766	2.199	2.584	3.410	3.941	3.045	1.743	1.973	1.835	1.657	2.034	1.873	1.776	1.667	2.023

Tabela 5 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Cascade-Forward* para o primeiro caso com a configuração 80% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

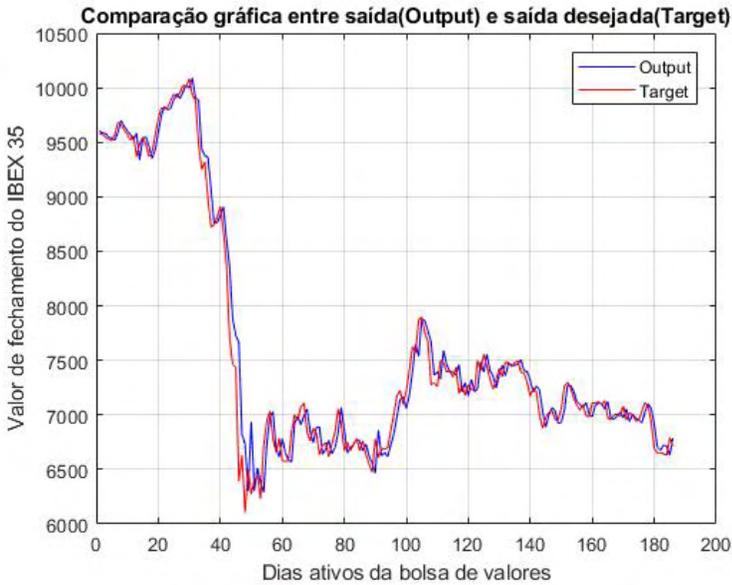



Figura 10 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (16,12,8) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

CASCADE															
INPUT:IBEX 35															
90%															
1 camada oculta							3 camadas ocultas								
Neurônios por camada							Neurônios por camada								
100	150	200	250	300	400	450	7-5-3	2-3-4	8-6-4	16-12-8	48-36-24	6-5-4	4-5-6	3-5-7	4-3-2
2.134	1.930	3.611	2.480	3.510	2.961	3.239	1.665	1.926	2.015	1.654	1.974	1.813	1.660	1.647	1.720

Tabela 6 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Cascade-Forward* para o primeiro caso com a configuração 90% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

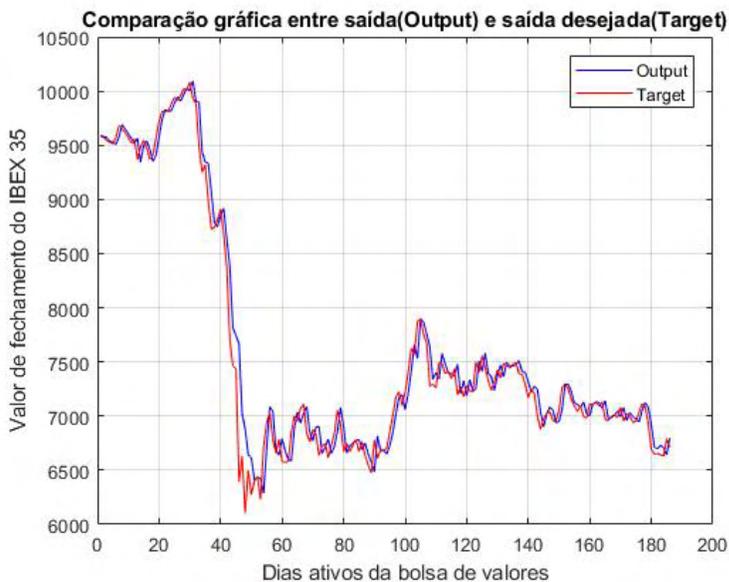



Figura 11 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (3,5,7) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

5.1.3 *Usando a generalized regresion neural network*

GRNN	
INPUT:IBEX 35	
70%	
SPREAD	
0.1	1
2.696	2.693

Tabela 7 - Resultados do *MAPE* da rede neural *GRNN* para o primeiro caso com a configuração 70% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

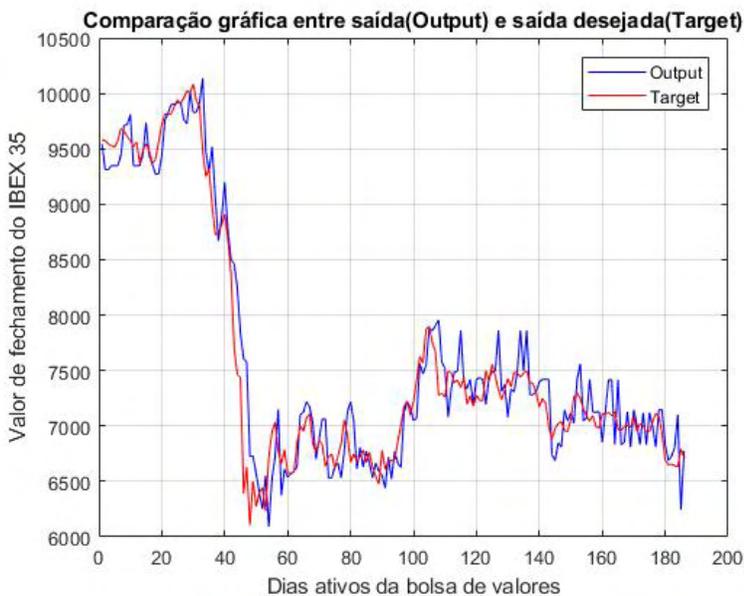



Figura 12 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente ao *spread* igual a 1, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

GRNN	
INPUT:IBEX 35	
80%	
SPREAD	
0.1	1
2.670	2.668

Tabela 8 - Resultados do *MAPE* da rede neural *GRNN* para o primeiro caso com a configuração 80% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

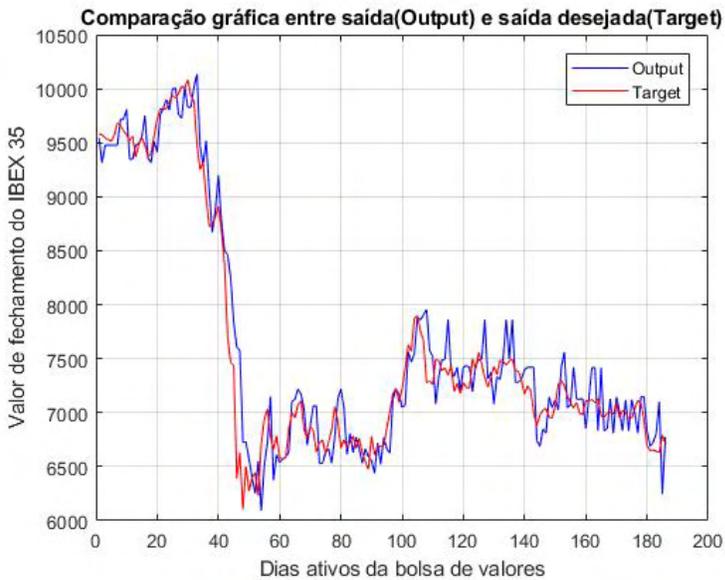



Figura 13 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente ao *spread* igual a 1, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

GRNN	
INPUT:IBEX 35	
90%	
SPREAD	
0.1	1
2.663	2.660

Tabela 9 - Resultados do *MAPE* da rede neural *GRNN* para o primeiro caso com a configuração 90% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

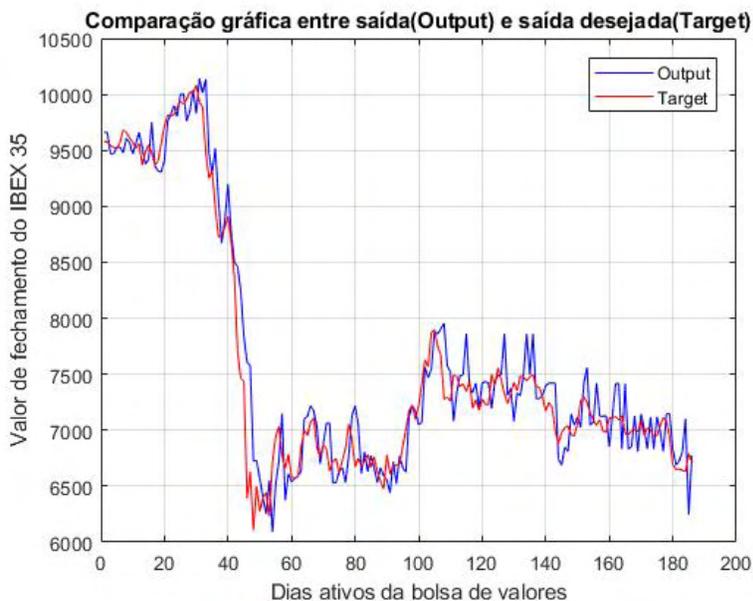



Figura 14 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente ao *spread* igual a 1, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

5.2 Análise do *mape* do caso 2

Neste caso, como já se citou anteriormente, tomam-se como entradas os índices que possuem uma correlação com o IBEX 35 compreendida entre 0,3 e 0,8. Devido a que uma correlação muito alta entre os parâmetros de entrada pode produzir erros por causa da redundância. Escolhendo 6 índices que somados ao mesmo IBEX 35 chega-se num total de 7 índices. Portanto, levando em conta os valores dos 5 dias anteriores, totalizam-se 35 entradas.

5.2.1 *Usando a rede neural feedforward*

FEEDFORWARD																	
INPUT:SELEÇÃO DE ÍNDICES																	
70%																	
1 camada oculta						3 camadas ocultas											
NEURÔNIOS POR CAMADA						NEURÔNIOS POR CAMADA											
100	150	200	250	300	400	48-36-24	50-55-60	40-35-30	20-15-5	70-40-10	25-15-5	30-25-20	30-20-30	10-40-70	30-35-40	20-25-30	5-15-25
71.518	29.132	63.481	48.673	75.244	173.647	23.255	48.127	6.318	12.001	19.501	10.403	10.249	11.150	81.257	26.612	14.263	10.418

Tabela 10 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Feedforward*, para o segundo caso, com a configuração 70% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

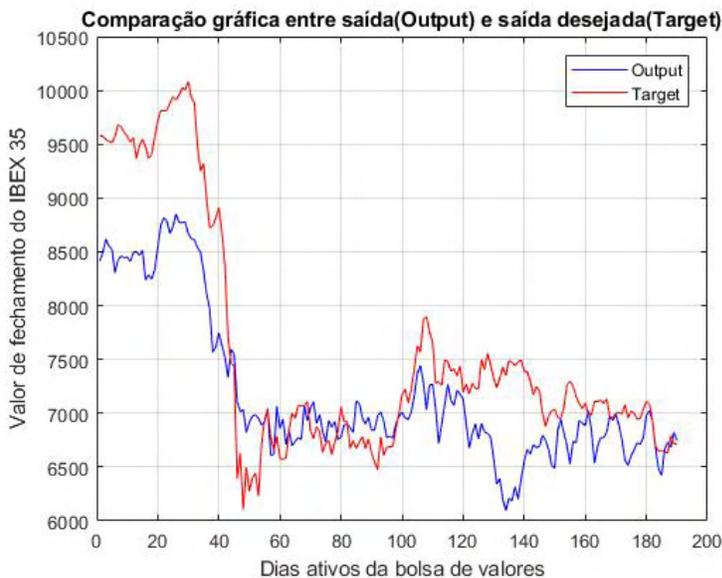



Figura 15 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (40,35,30) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

FEEDFORWARD																	
INPUT:SELEÇÃO DE ÍNDICES																	
80%																	
1 camada oculta						3 camadas ocultas											
NEURÔNIOS POR CAMADA						NEURÔNIOS POR CAMADA											
100	150	200	250	300	400	48-36-24	50-55-60	40-35-30	20-15-5	70-40-10	25-15-5	30-25-20	30-20-30	10-40-70	30-35-40	20-25-30	5-15-25
19.944	30.250	98.499	43.524	113.687	95.983	17.376	27.171	20.833	9.287	19.198	8.257	15.235	23.769	54.460	16.824	16.186	4.603

Tabela 11 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Feedforward* (para o segundo caso) com a configuração 80% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

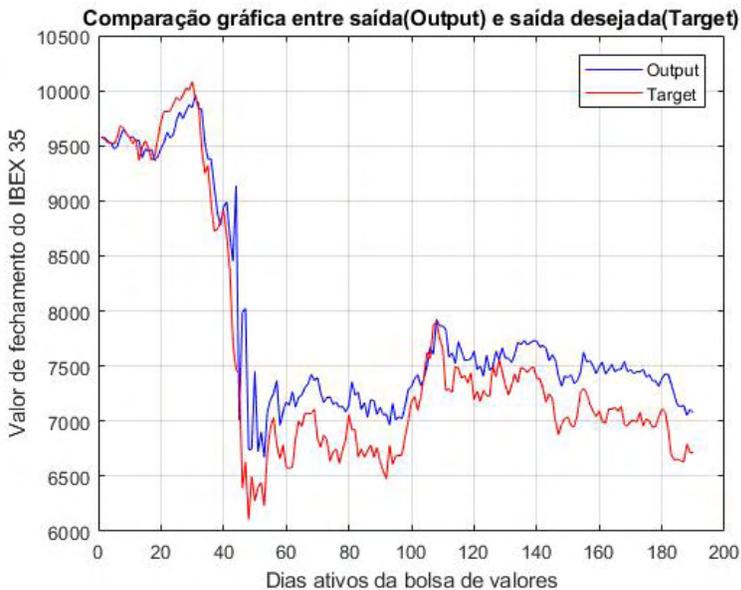



Figura 16 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (5,15,25) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

FEEDFORWARD																	
INPUT:SELEÇÃO DE ÍNDICES																	
90%																	
1 camada oculta						3 camadas ocultas											
NEURÔNIOS POR CAMADA						NEURÔNIOS POR CAMADA											
100	150	200	250	300	400	48-36-24	50-55-60	40-35-30	20-15-5	70-40-10	25-15-5	30-25-20	30-20-30	10-40-70	30-35-40	20-25-30	5-15-25
14.975	47.479	32.418	34.420	151.947	88.224	22.824	18.583	18.581	11.553	20.122	3.376	10.914	17.907	8.217	10.433	15.199	5.258

Tabela 12 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Feedforward* para o segundo caso com a configuração 90% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

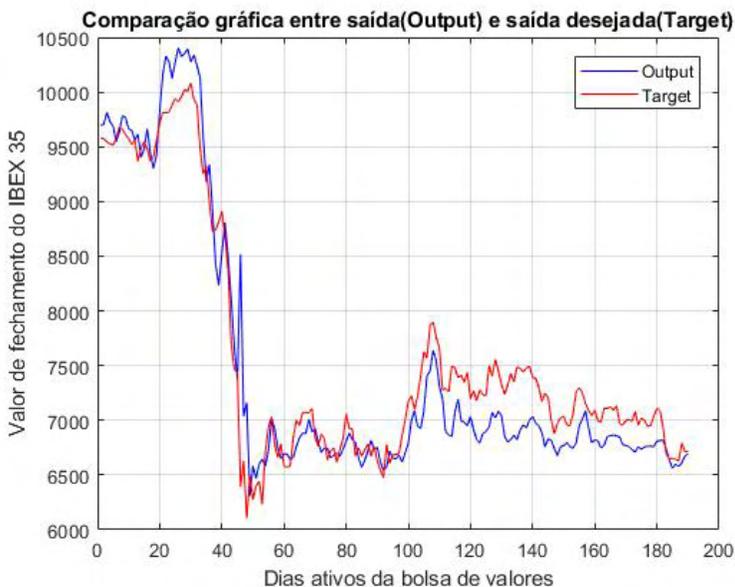



Figura 17 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (25,15,5) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

5.2.2 Usando a rede neural cascade-forward

CASCADE																	
INPUT:SELEÇÃO DE ÍNDICES																	
70%																	
1 camada oculta						3 camadas ocultas											
NEURÔNIOS POR CAMADA						NEURÔNIOS POR CAMADA											
100	150	200	250	300	400	48-36-24	50-55-60	40-35-30	20-15-5	70-40-10	25-15-5	30-25-20	30-20-30	10-40-70	30-35-40	20-25-30	5-15-25
55.703	29.725	146.981	131.202	147.443	86.384	70.441	56.153	40.595	2.265	31.756	26.158	75.009	22.093	55.155	35.588	16.855	9.492

Tabela 13 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Cascade-Forward* para o segundo caso com a configuração 70% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

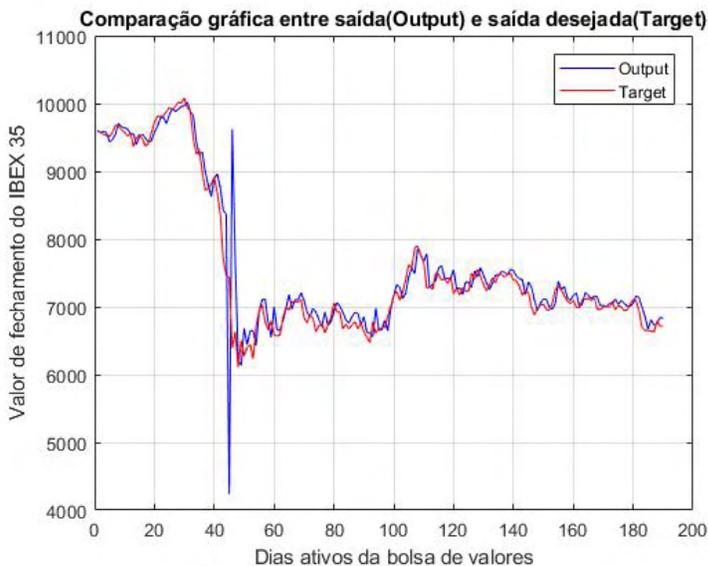



Figura 18 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (20,15,5) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

CASCADE																	
INPUT:SELEÇÃO DE ÍNDICES																	
80%																	
1 camada oculta						3 camadas ocultas											
NEURÔNIOS POR CAMADA						NEURÔNIOS POR CAMADA											
100	150	200	250	300	400	48-36-24	50-55-60	40-35-30	20-15-5	70-40-10	25-15-5	30-25-20	30-20-30	10-40-70	30-35-40	20-25-30	5-15-25
2.339	55.813	59.769	16.786	121.992	51.900	80.957	67.642	5.726	4.433	50.911	16.089	31.711	9.125	36.588	38.766	5.052	2.096

Tabela 14 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Cascade-Forward* para o segundo caso com a configuração 80% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

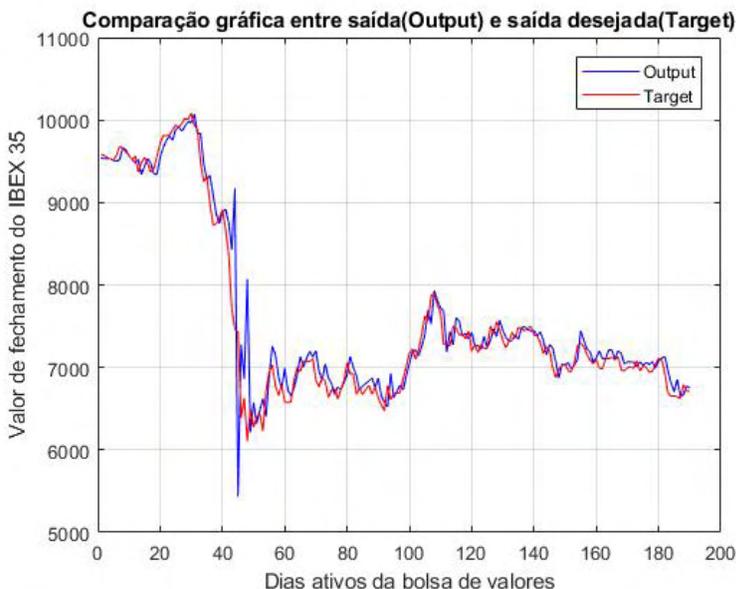



Figura 19 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a uma configuração de três camadas ocultas com (5,15,25) neurônios, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

CASCADE																	
INPUT:SELEÇÃO DE ÍNDICES																	
90%																	
1 camada oculta						3 camadas ocultas											
NEURÔNIOS POR CAMADA						NEURÔNIOS POR CAMADA											
100	150	200	250	300	400	48-36-24	50-55-60	40-35-30	20-15-5	70-40-10	25-15-5	30-25-20	30-20-30	10-40-70	30-35-40	20-25-30	5-15-25
1.877	34.187	12.967	122.998	51.564	82.196	34.178	24.602	23.146	9.495	11.775	8.859	14.304	21.327	12.942	92.118	7.319	2.524

Tabela 15 - Resultados do *MAPE* da rede neural *Cascade-Forward* para o segundo caso com a configuração 90% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

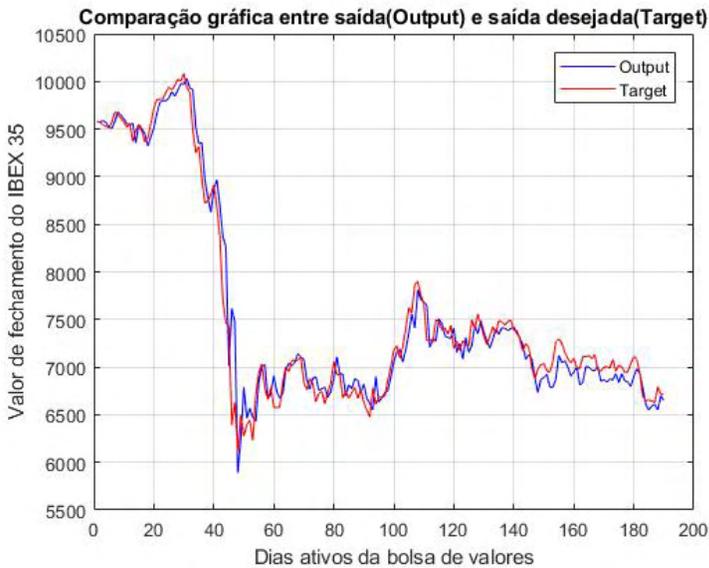



Figura 20 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente a 100 neurônios na camada oculta, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

5.2.3 Usando a generalized regresion neural network

GRNN	
INPUT:SELEÇÃO DE ÍNDICES	
70%	
SPREAD	
0.1	1
16.898	16.898

Tabela 16 - Resultados do *MAPE* da rede neural *GRNN* para o segundo caso com a configuração 70% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

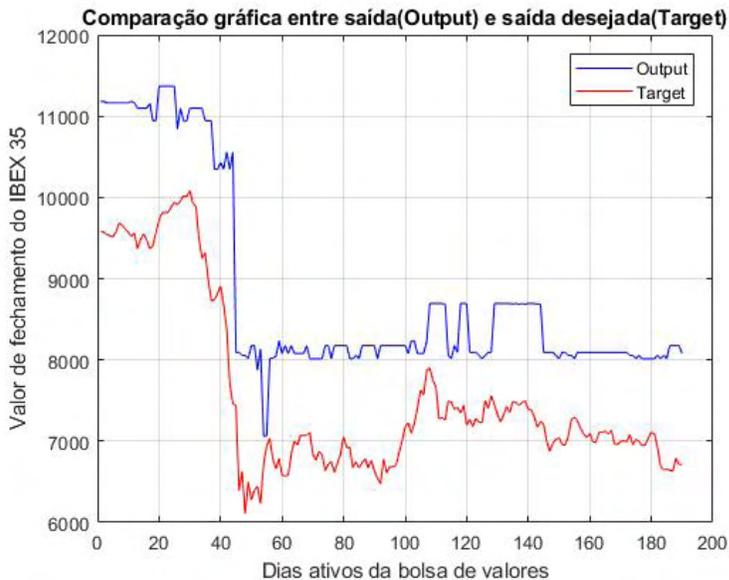



Figura 21 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente ao *spread* igual a 1, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

GRNN	
INPUT:SELEÇÃO DE ÍNDICES	
80%	
SPREAD	
0.1	1
15.254	15.254

Tabela 17 - Resultados do *MAPE* da rede neural *GRNN* para o segundo caso com a configuração 80% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

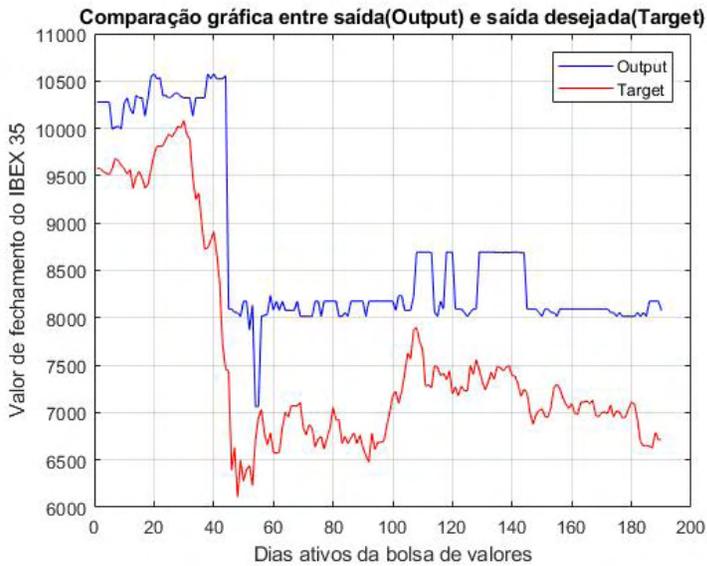



Figura 22 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente ao *spread* igual a 1, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

GRNN	
INPUT:SELEÇÃO DE ÍNDICES	
90%	
SPREAD	
0.1	1
15.243	15.243

Tabela 18 - Resultados do *MAPE* da rede neural *GRNN* para o segundo caso com a configuração 90% treinamento, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

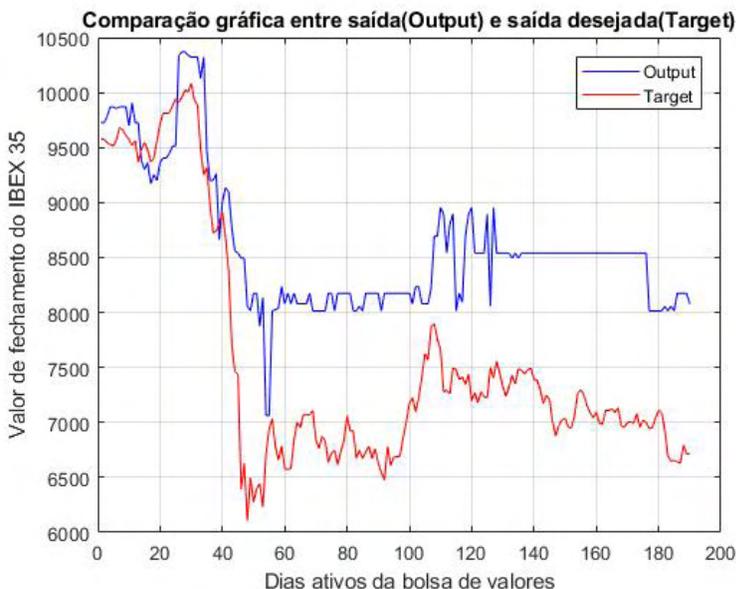



Figura 23 - Gráfico comparativo entre a previsão e o alvo correspondente ao *spread* igual a 1, relativo à predição dos valores de fechamento do ano 2020.

Fonte: Elaboração própria

6 I CONCLUSÕES

Observa-se que os resultados mostrados do *MAPE* no caso 1 (IBEX 35 como entrada em janelamento), são melhores que no caso 2 (IBEX 35 mais índices externos como entrada em janelamento), assim como as comparações gráficas mostradas mostram um melhor desempenho da previsão realizada quando é somente utilizado o mesmo IBEX 35 em janelamento como entrada.

Estes são, os melhores resultados do *MAPE* caso 1 em cada rede neural:

Feedforward: 1.593.

Cascade-Forward: 1.647.

GRNN: 2.660.

Estes são, os melhores resultados do *MAPE* caso 2 em cada rede neural:

Feedforward: 3.376.

Cascade-Forward: 1.877.

GRNN: 15.243.

Como já foi mencionado, os resultados do caso 1 são melhores do que no caso 2, a diferença é especialmente grande quando o *GRNN* é utilizado. Além do fato de os melhores resultados do caso 1 serem melhores do que os melhores resultados do caso 2, os outros

resultados correspondentes a outras configurações de neurónios mostrados nas tabelas de resultados do *MAPE* são melhores também no caso 1, mostrando uma maior fiabilidade e homogeneidade, independentemente da configuração de neurónios utilizada.

Portanto, utilizando apenas os 5 dias anteriores do mesmo IBEX 35 (janelamento) como entrada seria suficiente para fazer uma previsão muito precisa, sem a necessidade de recolher uma enorme quantidade de dados de outros índices externos, tornando a nossa tarefa de recolha de dados e condicionamento muito mais fácil. A inserção dos índices externos não só não oferece nenhuma melhoria, também pioram a previsão, especialmente ao usar a *GRNN*.

Os dados diários das entradas utilizadas para o treinamento das redes neurais foram tomados como mencionado acima de janeiro de 2010 a dezembro de 2019, e com esses dados as redes foram capazes de fazer uma previsão de excelente qualidade dos valores de fechamento da bolsa IBEX 35 do ano 2020, apesar de em 2020 termos sofrido uma pandemia que levou a uma grande crise económica.

Este artigo, expõe uma vez mais a capacidade das redes neurais de prever com precisão os índices bolsistas, quando dispomos de grandes bases de dados fiáveis sobre eles.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Roberto Minussi, por depositar em mim a confiança para realizar esta pesquisa, como seu orientado, ajudando-me tanto com as dificuldades próprias do mestrado como com outras dificuldades pessoais.

A todos os professores que contribuíram para o desenvolvimento desta tese, em especial:

Profª. Drª. Anna Diva Plasencia Lotufo, Profª. Drª. Mara Lúcia Martins Lopes é Profª. Drª.Thays Aparecida de Abreu Santos.

A Haislán Bernardes, pelo seu apoio desde o início, ajudando-me com todos os problemas pessoais e burocráticos necessários, porque sem a sua ajuda a conclusão desta tese teria sido impossível.

A Mauro de Souza Tonelli Neto, pela sua grande ajuda na abordagem da tese, tanto técnica como pessoal.

A Giovanni Panegossi Formaggio por ser um bom amigo e um excelente companheiro, que esteve sempre disponível para me ajudar com questões da tese e que foi para mim um guia importante especialmente no início da dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

REFERÊNCIAS

ABOUELDAHAB, T.; FAKHRELDIN, M. **Prediction of stock market indices using hybrid genetic algorithm/ particle swarm optimization with perturbation term**. 2011. Disponível em: https://www.yumpu.com/en/document/view/28272800/prediction-of-stock-market-indices-using-hybrid-genetic-algorithm. Acesso em: 18 maio 2021.

AL-DOSARY, N. M. N.; AL-HAMED, S. A.; ABOUKARIMA, A. M. K-nearest neighbours' method for prediction of fuel consumption in tractor-chisel plow systems. **Engenharia Agrícola**, Jaboticabal, v. 39, n. 6, p. 729-736. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-69162019000600729. Acesso em: 18 maio 2021.

ALONSO, J.; GARCIA, J. **¿Qué tan buenos son los patrones del IGBC para predecir su comportamiento?** 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/41805226_Que_tan_buenos_son_los_patrones_del_IGBC_para_predecir_su_comportamiento_una_aplicacion_de_datos_de_alta_frecuencia. Acesso em: 18 maio 2021.

ASADI, S.; HADAVANDI, E.; MEHMANPAZIR, F.; NAKHOSTIN, M. Hybridization of evolutionary Levenberg–Marquardt neural networks and data pre-processing for stock market prediction. **Knowledge-Based Systems**, Amsterdam, v. 35, p. 245-58, 2012.

BHARDWAJ, G.; SWANSON, N. An empirical investigation of the usefulness of Arfima models for predicting macroeconomic and financial time series. **Journal of Econometrics**, Amsterdam, v. 131, n.1/2, p. 539-578, 2006.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, Amsterdam, v. 31, n. 3, p. 307-327, 1986.

BOYACIOGLU, M. A.; AVCI, D. An adaptive network-based fuzzy inference system (ANFIS) for the prediction of stock market return: the case of the Istanbul stock exchange. **Expert Systems with Applications**, Doetinchem, v. 37, n. 12, 7908-7912, 2010.

CAI, Y.; CHOU, R.; LI, D. Explaining international stock correlations with CPI fluctuations and market volatility. **Journal of Banking & Finance**, Amsterdam, v. 33, n. 11, p. 2026-2035, 2009.

CALDAS MONTES, G.; PIRES TIBERTO, B. Macroeconomic environment, country risk and stock market performance: evidence for Brazil. **Economic Modelling**, Amsterdam, v. 29, n. 5, p. 1666-1678, 2012.

CARVALHO, J. V.; ROMANEL, C. Redes neurais temporais aplicadas ao monitoramento de barragens. **Revista Eletrônica de Sistemas de Informação**, Curitiba, v. 6, n. 1, 2007. Disponível em: http://www.periodicosibepes.org.br/index.php/reinfo/article/view/186. Acesso em: 18 maio 2021.

CECILIA-GARCÍA, M.; JALAL, A. M.; GARZÓN, L. A.; LÓPEZ, J. M. Métodos para predecir índices Bursátiles. **Ecos de Economía**, Medellin, v. 17, n. 37, p. 51-82, 2013. Disponível em: http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S1657-42062013000200003&script=sci_abstract&tlng=es. Acesso em: 18 maio 2021.

CHAIGUSIN, S.; CHIRATHAMJAREE, C.; Y CLAYDEN, J. The use of neural networks in the prediction of the stock exchange of Thailand (SET) index. *In:* IEEE COMPUTATIONAL INTELLIGENCE FOR MODELLING CONTROL & AUTOMATION, 2008, Vienna. **Proceedings** [of the…]. Vienna: IEEE, 2008.

CHANG, Y.; YEUNG, C.; YIP, C. **Analysis of the influence of economic indicators on stock prices using multiple regression**. 2000. Disponível em: https://silo.tips/download/analysis-of-the-influence-of-economic-indicators-on-stock-prices-using-multiple. Acesso em: 18 maio 2021.

CHEN, A. S.; LEUNG, M.; DAOUK, H. Application of neural networks to an emerging financial market: forecasting and trading the Taiwan stock index. **Computers & Operations Research**, Oxford, v. 30, n. 6, p. 901-923, 2003.

CHEN, S. S. Predicting the bear stock market: macroeconomic variables as leading indicators. **Journal of Banking & Finance**, Amsterdam, v. 33, n. 2, p. 211-223, 2009.

CHENG, C. H.; CHEN, T. L.; WEI, L. Y. A hybrid model based on rough sets theory and genetic algorithms for stock price forecasting. **Information Sciences**, Philadelphia, v. 180, n. 9, p. 1610-1629, 2010.

CHUNG-HO, S.; TAI-LIANG, C.; CHENG, C.; CHING, C. Forecasting the stock market with linguistic rules generated from the minimize entropy principle and the cumulative probability distribution approaches. **Entropy**, Basel, v. 12, n. 12, 2010. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/49588637_Forecasting_the_Stock_Market_with_Linguistic_Rules_Generated_from_the_Minimize_Entropy_Principle_and_the_Cumulative_Probability_Distribution_Approaches. Acesso em: 18 maio 2021.

CLEMENTS, M.; FRANSES, P.; SWANSON, N. Forecasting economic and financial time-series with non-linear models. **International Journal of Forecasting**, Amsterdam, v. 20, n. 2, p. 169-183, 2004.

CORTES, C.; VAPNIK, V. Support-vector networks. **Machine Learning**, New York, v. 20, n. 3, p. 273–297, 1995.

DAI, W.; WU, J. Y.; LU, C. J. Combining nonlinear independent component analysis and neural network for the prediction of Asian stock market indexes. **Expert Systems with Applications**, Oxford, v. 39, n. 4, p. 4444-4452, 2012.

EL-HENAWY, I.; KAMAL, A.; ABDELBARY, H.; ABAS, A. Predicting stock index using neural network combined with evolutionary computation methods. *In:* THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATICS AND SYSTEMS – INFOS, 7, 2010, Cairo. **Proceedings** [of the…]. Cairo: IEEE, 2010. 2010. 6 p.

ENGLE, R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. **Econometrica**, West Sussex, v. 50, n. 4, p. 987-1007, 1982.

FALAHIAN, R.; DASTJERDI, M. M.; GHARIBZADEH, S. Authentic modelling of complex dynamics of biological systems by the manipulation of artificial intelligence. *In:* THE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND SIGNAL PROCESSING, AISP, 2015, Mashhad. **Proceedings** [of the…] Mashhad: IEEE, 2015. p. 47-52.

FERNÁNDEZ-BENLLOCH, L. **Predicción del índice bursátil Ibex 35 mediante selección de inputs con redes neuronales**. 2016. Disponível em: https://riunet.upv.es/handle/10251/72570. Acesso em: 19 maio 2021.

FRANSES, P.; GHIJSELS, H. Additive outliers, GARCH and forecasting volatility. **International Journal of Forecasting**, Amsterdam, v. 15, n. 1, p. 1-9. 1999.

GENÇTÜRK, M.; ÇELIK, I.; BINICI, Ö. Causal relations among stock returns and macroeconomic variables in a small and open economy. **African Journal of Business Management**, Durbanville, v. 9, n. 1, p. 6177-6182, 2012.

GILLILAND, M. **The business forecasting deal: exposing myths, eliminating bad practices, providing practical solutions**. New York: John Wiley, 2010. 252 p.

GURESEN, E.; KAYAKUTLU, G.; DAIM, T. Using artificial neural network models in stock market index prediction. **Expert Systems with Applications**, Oxford, v. 38, n. 8, p. 10389-10397, 2011.

GUEVARA-DÍAZ, J **Mapas autoorganizativos y el problema del agente viajero, backpropagation y reconocimiento de dígitos**. 2007. Disponível em: http://www.vision.ime.usp.br/~jorjasso/files/SOMBACKJorgeGuevara.pdf. Acesso em: 19 maio 2021.

GOUK, H. G.; BLAKE. A. M. Fast sliding window classification with convolutional neural networks. *In:* PROCEEDINGS INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE AND VISION COMPUTING, 29, 2014, Hamilton. **Proceedings** [of the…]. Hamilton: IEEE, 2014. p. 114–118.

GROSSBERG, S. Adaptive resonance theory: how a brain learns to consciously at-tend, learn, and recognize a changing world. **Neural Networks**, Oxford, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/233410858_Adaptive_Resonance_Theory_How_a_brain_learns_to_consciously_attend_learn_and_recognize_a_changing_world_Neural. Acesso em: 19 maio 2021.

HAYKIN, S. **Neural networks and learning machines**. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2008.

HAGAN, M. T.; DEMUTH, H. B.; BEALE; M. H.; DE-JESÚS, O. **Neural network design**. 2. ed. Amsterdam: M. Hagan, 2014.

HOLLAND, J. Genetic algorithms. **Scientific American**, New York, v. 267, n. 1, p. 66-73, 1992.

KENNEDY, J; EBERHART, R. Particle swarm optimization. *In:* PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS, ICNN'95, 1995, Perth. **Proceedings** [of the…]. Perth: [s.n.], 1995. V. 4, p. 1942-1948.

KIM, K. J.; HAN, I. Genetic algorithms approach to feature discretization in artificial neural networks for the prediction of stock price index. **Expert Systems with Applications**, Oxford, v. 19, n. 2, p. 125-132, 2000.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C.; VECCHI, M. **Optimization by simulated annealing**. New York: Science, 1983.

KOMO, D.; CHANG, C. I.; KO, H. Neural network technology for stock market index prediction. *In:* INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPEECH, IMAGE PROCESSING AND NEURAL NETWORKS, 1994, Hong Kong. **Proceedings** [of the…]. Hog Kong: IEEE, 1994. p. 543-546.

LASFER, M.; MELNIK, A.; THOMAS, D. Short-term reaction of stock markets in stressful circumstances. **Journal of Banking & Finance**, Amsterdam, v. 27, n. 10, p. 1959-1977, 2003.

LEE, K.; JO, G. Expert system for predicting stock market timing using a candlestick chart. **Expert Systems with Applications**, Oxford, v. 16, n. 4, p. 357-364, 1999.

LEVENBERG, K. A Method for the solution of certain non-linear problems in least squares. **Quarterly of Applied Mathematics**, Providence, v. 2, n. 2, p. 164–168, 1944. doi:10.1090/qam/10666.

LIU, H. C.; HUNG, J. C. Forecasting S&P-100 stock index volatility: the role of volatility asymmetry and distributional assumption in Garch models. **Expert Systems with Applications**, Oxford, v. 37, n. 7, p. 4928-4934, 2010.

LU, C. J.; CHANG, C. H.; CHEN, C. Y.; CHIU, C. C.; LEE, T. S. Stock index prediction: a comparison of MARS, BPN and SVR in an emerging market. *In:* INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRIAL ENGINEERING AND MANAGEMENT, 2009, Hong Kong. **Proceedings** [of the...]. Hong Kong: IEEE, 2009. p. 2343-2347.

LUPU, C.; POPESCU, D.; UDREA, A. Real-time control applications for nonlinear processes based on adaptive control and the static characteristic. **WSEAS Transactions on Systems and Control**, Zographou, v. 3. p. 607-616, 2008.

MACIÁN-PÉREZ, L. **Estudio de los efectos de las variables macroeconómicas sobre la bolsa**. 2017. Disponível em: https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/80051/MACI%C3%81N%20-%20Estudio%20de%20los%20efectos%20de%20las%20principales%20variables%20macroecon%C3%B3micas%20sobre%20la%20Bolsa.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 19 maio 2021.

MAJHI, R.; PANDA, G.; MAJHI, B.; SAHOO, G. Efficient prediction of stock market indices using adaptive bacterial foraging optimization (ABFO) and BFO based techniques. **Expert Systems with Applications**, Oxford, v. 36, n. 6, p. 10097-100104, 2009.

MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Philadelphia, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963.

MORRIS, G. L. **Candlestick charting explained**: timeless techniques for trading stocks and futures. New York: McGraw-Hill, 2006.

MULLER, S.; MARCHETTO, J.; AIRAGHI, S; KOUMOUTSAKOS, P. Optimization based on bacterial chemotaxis. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, Piscataway, v. 6, n. 1, p. 16-29, 2002.

NIU, D. X.; WANG, H. Q.; GU, Z. H. Short-term load forecasting using general regression neural network. *In:* INTERNATIONAL CONFERENCE ON MACHINE LEARNING AND CYBERNETICS, 2005, Guangzhou. **Proceedings** [of the …]. New York: IEEE, 2005. v. 7, p. 4076-4082, 2005.

NOSE FILHO, K. **Previsão de carga multinodal utilizando redes neurais de regressão generalizada**. 2011. 90 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/87097. Acesso em: 19 maio 2021.

ORR, M. J. L. **Introduction to radial basis function networks**. Edinburgh: Centre for Cognitive Science, University of Edinburgh, 1996. Disponível em: https://www.cc.gatech.edu/~isbell/tutorials/rbf-intro.pdf. Acesso em: 19 maio 2021.

PAI, P. F.; LIN, C. S. A hybrid Arima and support vector machines model in stock price forecasting. **Omega**, Oxford, v. 33, n. 6, p. 497-505, 2005.

PARISI, A.; PARISI, F.; DÍAZ, D. Modelos de algoritmo genético y redes neuronales en la predicción de índices bursátiles asiáticos. **Cuadernos de Economía**, Santiago, v. 43, n. 128, p. 251-284, 2006. Disponível em: https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0717-68212006000200002&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 19 maio 2021.

PARK, D. C.; EL-SHARKAWI, M. A.; MARKS II, R. J.; ATLAS, E. Electric load forecasting using an artificial neural network. **IEEE Transactions on Power System**s, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 442-449, 1991.

PIERDZIOCH, C.; DOPKE, J.; HARTMANN, D. Forecasting stock market volatility with macroeconomic variables in real time. **Journal of Economics and Business**, Philadelphia, v. 60, n. 3, p. 256-276, 2008.

ROSENBLATT, F. The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain. **Cornell Aeronautical Laboratory, Psychological Review**, Whashington, v. 65, n. 6, p. 386–408, 1958. Disponível em: https://psycnet.apa.org/fulltext/1959-09865-001.pdf. Acesso em: 19 maio 2021.

ROH, T. Forecasting the volatility of stock price index. **Expert Systems With Application**, Oxford, v. 33, n. 4, p. 916-922, 2007.

SHEN, W.; GUO, X.; WUB, C.; WU, D. Forecasting stock indices using radial basis function neural networks optimized by artificial fish swarm algorithm. **Knowledge- Based Systems**, Amsterdam, v. 24, n. 3, p. 378-385, 2011.

SILVERMAN, B.; JONES, M. An important contribution to nonparametric discriminant analysis and density estimation: commentary on fix and hodges (1951). **International Statistical Review / Revue Internationale De Statistique**, West Sussex, v. 57, n. 3, p. 233-238, 1989.

SPECHT, D. F. A generalized regression neural network. **IEEE Transactions on Neural Networks**, Piscataway, v. 2, p. 568-576, 1991.

STIGLER, S. Who discovered bayes's theorem? **The American Statistician**, Alexandria, v. 37, n. 4, p. 290-296, 1983.

TORO-OCAMPO, E. M.; MOLINA-CABRERA, A.; GARCÉS-RUIZ, A. Pronóstico de bolsa de valores empleando técnicas inteligentes. **Tecnura**, Bogota, v. 9, n. 18, p. 57-66, 2006.

TRIPATHI, M. M.; UPADHYAY, K. G.; SINGH, S. N. Short-term load forecasting using generalized regression and probabilistic neural networks in the electricity market. **The Electricity Journal**, Oxford, v. 21, n. 9, p. 24-34, 2008.

VELÁSQUEZ-HENAO, J. D.; FRANCO-CARDONA, C. J.; OLAYA-MORALES, Y. A review of DAN2 (dynamic architecture for artificial neural networks) model in time series forecasting. **Ingeniería y Universidad**, Bogotá, v. 16, n. 1, p. 135-146, 2012. Disponível em: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-21262012000100008. Acesso em: 19 maio 2021.

WANG, J. Z.; WANG, J. J.; ZHANG, Z. G.; GUO, S. P. Forecasting stock indices with back propagation neural network. **Expert Systems with Applications**, Oxford, v. 38, n. 11, p. 14346-14355, 2011.

WANG, J. J.; WANG, J. Z.; ZHANG, Z. G.; GUO, S. P. Stock index forecasting based on a hybrid model. **Omega**, Oxford, v. 40, n. 6, p. 758-766, 2012.

WANG, Y. F.; CHENG, S.; HSU, M. H. Incorporating the Markov chain concept into fuzzy stochastic prediction of stock indexes. **Applied Soft Computing**, Amsterdam, v. 10, n. 2, p. 613-617, 2010.

WARSITO, B.; SANTOSO, R.; SUPARTI, S.; YASIN, H. Cascade forward neural network for time series prediction. **Journal of Physics: Conference Series**, Bristol, v. 1025, n. 1, p. 012097, 2018. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/325445281_Cascade_Forward_Neural_Network_for_Time_Series_Prediction. Acesso em: 19 maio 2021.

WERBOS, P. J. **Beyond regression**: new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences. 1974. Thesis (Doctor) - Harvard University, Harvard, 1974.

XIA, C.; WNAG, J.; MCMENEMY, K. Short-medium- and long-term load forecasting model and virtual load forecaster based on radial basis function neural networks. **Electrical Power and Energy Systems**, New York, v. 32, p. 743-750, 2010.

XIN, Y. **Linear regression analysis**: theory and computing. Sigapura: World Scientific, 2009. 328 p.

YAP, K. S. Short term load forecasting using a hybrid neural network. *In:* IEEE INTERNATIONAL POWER AND ENERGY CONFERENCE - PECON, 2006, Tehran. **Proceedings** [of the …] Tehran: IEEE, 2006. p. 123-128.

YU, T. K.; HUARNG, K. H. A neural network-based fuzzy time series model to improve forecasting. **Expert Systems With Applications**, Oxford, v. 37, n. 4, p. 3366-3372, 2010.

YUDONG, Z.; LENAN, W. Stock market prediction of S&P 500 via combination of improved BCO approach and BP neural network. **Expert Systems with Applications**, Oxford, v. 36, n. 5, p. 8849-8854, 2009.

ZEMKE, S. Non-linear index prediction. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Amsterdam, v. 269, n. 1, p. 177-183, 1999.

CAPÍTULO 20

METODOLOGIA AULA INVERTIDA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS: UNA APROXIMACION CONCEPTUAL

Data de aceite: 02/05/2022

Mileidy Marcela Velásquez Aguirre
Esp. en docencia, Corporación Universitaria Adventista (UNAC), estudiante de Maestría en Educación
Medellín, Colombia
https://orcid.org/0000-0002-5750-6227

Neder Manuel Palma Caballero
Esp. en docencia, Corporación Universitaria Adventista (UNAC), estudiante de Maestría en Educación
Medellín, Colombia
https://orcid.org/0000-0002-4423-8833

Steven Alberto Liévano González
Esp. en docencia, Corporación Universitaria Adventista (UNAC), estudiante de Maestría en Educación
Medellín, Colombia
https://orcid.org/0000-0002-8328-0858

Saraí Ana Ortega Pineda
Doctora en Educación. Universidad Federico Villareal, Lima-Perú; docente en la Corporación Universitaria Adventista (UNAC)
Medellín, Colombia

Capítulo de libro derivado del proyecto de investigación “Evaluación del uso de la Metodología Aula Invertida en el Aprendizaje de las Matemáticas en el Colegio Adventista Simón Bolívar de Lérida, Colombia.” De la Maestría en Educación de la Corporación Universitaria Adventista.

RESUMEN: En el presente trabajo de investigación se analiza y describe la implementación del método “Aula invertida” en el desarrollo de los contenidos de la primera unidad del área de Matemáticas. El tipo de investigación se ajusta a un diseño cuasi experimental con muestras ya conformadas ya sea para el grupo control y experimental y elegidas randomizadamente. Se pretende evaluar el uso de la metodología Aula Invertida (AI) en el aprendizaje del área de matemáticas en los estudiantes de 5to a 8vo grado del Colegio Adventista Simón Bolívar de Lérida a través de una prueba de entrada (alfa de Cronbach 0.865) y otra de salida. Según las estadísticas de muestras emparejadas los resultados muestran que: para el caso del grupo control del 5to grado se logra un sig.=0.360 y para el 7to grado un sig.=0.569; en ambos casos, se rechaza la Hi y acepta la Ho que señala que aplicando el método tradicional de la enseñanza y aprendizaje no existen diferencias significativas. Referente al grupo experimental, el grado de significancia para el 6to grado es de sig=0.000 al igual que el 8vo grado, aceptando la Hi que señala que existen diferencias significativas en la aplicación de la metodología AI en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; lo que nos permite revelar la necesidad de la utilización de esta metodología para mejores aprendizajes de esta área de estudio.

PALABRAS CLAVE: Aula invertida, aprendizaje, enseñanza, matemáticas, metodología.

INVERTED CLASSROOM METHODOLOGY IN THE LEARNING OF MATHEMATICS: A CONCEPTUAL APPROACH

ABSTRACT: This research work analyzes and describes the implementation of the “Inverted Classroom” method in the development of the contents of the first unit of the area of Mathematics. The type of research is adjusted to a quasi-experimental design with samples already formed for either the control and experimental groups and chosen randomly. It is intended to evaluate the use of the Inverted Classroom (AI) methodology in the learning of the area of mathematics in students from 5th to 8th grade of the Simon Bolívar Adventist School of Lérida through an entrance test (Cronbach’s alpha 0.865). and another out. According to the statistics of paired samples, the results show that: for the case of the control group of the 5th grade, a sig.=0.360 is achieved and for the 7th grade a sig.=0.569; in both cases, the Hi is rejected and the Ho is accepted, which indicates that applying the traditional method of teaching and learning there are no significant differences. Regarding the experimental group, the degree of significance for the 6th grade is sig=0.000, the same as for the 8th grade, accepting the Hi that indicates that there are significant differences in the application of the AI methodology in the teaching and learning process of the math; which allows us to reveal the need to use this methodology for better learning in this area of study.

KEYWORDS: Flipped classroom, learning, teaching, mathematics, methodology.

INTRODUCCIÓN

El modelo de Aula Invertida (Flipped Classroom) es un modelo de enseñanza tradicional en el que los profesores, que siguen siendo una parte fundamental de los procesos de enseñanza y aprendizaje, planifican estrategias más atractivas con técnicas mucho más motivadoras, respecto a las tradicionales, y con la garantía de poder ofrecer un nivel mucho mayor de atención y más personalizada; utiliza nuevas tecnologías y las plataformas educativas online, que les permite tener información respecto a los contenidos, lecciones o unidades que los alumnos han trabajado e información sobre sus dificultades a fin de apoyarles y profundizar en esas deficiencias al reunirnos en el aula, favoreciendo un aprendizaje individual, progresivo y al ritmo de cada alumno por lo que los estudiantes con mayores dificultades.

Con esta metodología de Aula Invertida (AI), esta investigación pretende evaluar el aprendizaje del área de matemáticas en los estudiantes de 5to a 8vo del Colegio Adventista Simón Bolívar de Lérida, así también como conocer sus beneficios ya que está comprobado que mejora la actitud del alumno hacia la materia y en su aprendizaje, sube el interés y la motivación, dota al alumno de una mejora en su autonomía e iniciativa personal, aumenta el compañerismo y la implicación de las familias, y por sobre todas las cosas, aumenta el grado de satisfacción de todos los involucrados.

El cambio metodológico que se produce cuando “invertimos” las clases, es esencialmente un cambio en la mentalidad del docente, un cambio en el centro de “interés” de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. De ser el centro de atención, el profesor, pasa

a ser el mediador del conocimiento, y el alumno, el protagonista de su propio aprendizaje. El involucrar las nuevas tecnologías permite que se desarrollen dentro del aula y fuera de ella.

MARCO DE REFERENCIA

La metodología aula invertida ha sido objeto de discusión en los campos de la enseñanza aprendizaje, motivando un análisis exhaustivo en muchas investigaciones y trabajos académicos, en diferentes niveles educativos, a nivel internacional y nacional.

En el aula invertida con ayuda de las TICs, se invierte el modelo tradicional de materiales desarrollados en el aula y el docente desarrolla un material que pueda ser utilizado fuera del aula. En esta metodología los alumnos realizan determinados procesos de aprendizaje, y el docente interviene como guía para potenciar y promover la adquisición de conocimientos y el proceso de práctica, de esta manera se anima a los estudiantes a una participación activa y al cambio de paradigma docente (GALLEGOS ZURITA e GALLEGOS ZURITA, 2017).

Bergmann & Sams (2014) señalan que "Dar la vuelta" a la clase establece una estructura con la cual se asegura que los alumnos reciben una educación personalizada y diseñada a la medida de sus necesidades individuales. El modelo requiere, entre otras estrategias, que los educandos vean videos, preparados por el profesor en los diversos temas, en sus casas, en su propio espacio, además de permitirles estar en constante comunicación con otros compañeros y profesores mediante debates online. Es durante la clase que los conceptos se afianzan con la ayuda del profesor.

Del mismo modo, Graham Brent Johnson (2013), en un estudio de tipo cuantitativo bajo un diseño exploratorio, realizó encuestas en tres clases de matemáticas de la escuela secundaria donde la instrucción fue "invertida", para examinar sus percepciones del método Flipped classroom y evaluar el papel de las redes sociales, la tecnología educativa, el dominio del aprendizaje y el autoestudio. Los resultados revelaron tres hallazgos principales: los estudiantes realizan menos tareas en un aula invertida que en una clase tradicional basada en el método tradicional; los estudiantes disfrutaron aprendiendo en un entorno de aula invertida, y se beneficiaron de ver sus clases en videos compiladas cada una de sus lecciones proporcionando una instrucción a su propio ritmo; entorno que efectivamente puede apoyar el dominio del aprendizaje para los estudiantes. Esto muestra las percepciones de los estudiantes que ya tuvieron una experiencia de aula invertida.

Una investigación colombiana, se centra en la metodología aula invertida en el aprendizaje de la cirugía. Como lo plantea su autor Domínguez y colaboradores (2015), compara el impacto de la clase magistral con el del aula invertida en el ambiente de aprendizaje en cirugía, donde se utilizó el cuestionario Dundee Ready Education Environment Measure (DREEM) en cuatro cohortes de estudiantes, del cual, se analizaron los cinco

dominios y la puntuación global del instrumento con ambas estrategias y se determinó que la puntuación de la estrategia de aula invertida en el cuestionario DREEM, se situó en un nivel de excelencia en comparación con la de la clase magistral. Es crucial determinar los factores que obtuvieron una puntuación negativa para promover el mejoramiento del entorno de aprendizaje, así como hacer mediciones en el tiempo para garantizar la calidad y el éxito de la estrategia.

Por otro lado, Díaz Garrido y colaboradores (2017) analizaron "la eficacia de la metodología de Flipped Classroom en la disciplina de Dirección de Operaciones, analizando para ello la motivación de los estudiantes y sus resultados de aprendizaje en cuanto a la adquisición de competencias y calificaciones obtenidas. Para ello, se lleva a cabo un análisis comparativo con dos grupos de docencia, habiendo aplicado la metodología de Flipped Classroom solo en uno de ellos". Respecto a los resultados, señalan que las calificaciones han sido superiores en el grupo donde se ha aplicado la metodología Flipped Classroom (DÍAZ GARRIDO et al., 2017).

Finalmente, Fúneme Mateus (2019) describe y analiza la implementación del "aula invertida" en el desarrollo de dos clases de cálculo diferencial en primer semestre universitario, abordando el concepto matemático de derivada desde su aplicación en problemas de razones de cambio, velocidades, máximos y mínimos, donde realiza grabaciones de las clases y prepara encuentros sincrónicos con los estudiantes. Lo anterior permitió revelar la necesidad de un desarrollo más profundo de los fundamentos de esta metodología en lo correspondiente al proceso de aprendizaje del objeto matemático derivada por parte de los estudiantes.

DEFINICIÓN

El método de enseñanza Flipped Classroom o aula invertida, es una estrategia de enseñanza implementada por los profesores Jonathan Bergman de Denver y Aarón Sams (BERGMANN e SAMS, 2014) del sur de california en Estados Unidos. Consiste en proporcionar material sobre un tema dado para que los alumnos accedan en su hogar. En clase, posteriormente se trabajará ejercitando o profundizando su contenido. Se trata de plantear en clase tareas colaborativas de ejercitación y práctica guiada por el docente. Es un modelo que centra su atención en el estudiante al cual le concede el rol principal, donde el trabajo de ciertos procesos de aprendizaje se trasladan fuera del salón de clase y la cátedra que habitualmente imparte el docente pueda ser atendida en horas extra-clase por el estudiante mediante herramientas multimedia donde los alumnos estudiarán por sí mismos los conceptos teóricos que el docente les proporciona y las clases se utilizan como medio para consolidar el conocimiento, aprovechando así el tiempo en clase para realizar actividades de aprendizaje más significativas como: resolver dudas, debates, ejercicios, laboratorios o proyectos.

Con esta metodología, el educando tiene un desarrollo integral de sus capacidades, habilidades, actitudes y valores (RIVADENEIRA BARREIRO et al., 2020). Cabe destacar que la integración de la tecnología en el proceso de formación es excelente, no solo porque es una forma de aprendizaje descentralizado, sino que también significa que los docentes actualizan e implementan herramientas basadas en la virtualidad (JANSSEN, 2020).

En el Aula Invertida, el alumno construye su conocimiento a partir de los elementos con los que interactúa, conoce o lee fuera de clase, antes de abordar el tema en el salón. Caro Torres y colaboradores (2020) dicen que el aula invertida permite impartir una clase interactiva y con mayor flexibilidad para adaptar la experiencia de aprendizaje. Por otro lado y desde otros ámbitos, (VALENTE, 2014) señala que las tecnologías digitales de información y comunicación proporcionaron importantes cambios en la educación presencial y a distancia que hasta 1980 estaba basada en material impreso producido y enviado a los alumnos. Con las tecnologías fueron creadas diversas modalidades de enseñanza que combinan actividades presenciales y actividades educacionales a distancia, realizadas por medio de las TDIC. Señala que hay diferentes maneras de combinar las actividades presenciales e a distancia, siendo una sala de aula invertida o *Flipped classroom* es una de ellas. Según este abordaje, el contenido y las instrucciones sobre un determinado asunto curricular no son transmitidos por el profesor en sala de aula. El alumno estudia el material antes de que él asista a las salas de aula, que pasa a ser el lugar de aprender activamente, realizando actividades de resolución de problemas o proyectos, discusiones, laboratorios, etc. con el apoyo del profesor y colaborativamente de los compañeros (VALENTE, 2014).

CARACTERÍSTICAS DEL AULA INVERTIDA

La educación a distancia es una modalidad del sistema educativo caracterizada por la interacción simultánea o diferida entre los actores del proceso educativo, facilitada por medios tecnológicos que propician el aprendizaje autónomo (ZAMBRANO VACACELA e YAUTIBUG CHIMBOLEMA, 2020). Es necesario que el docente cambie su rol de actor para que se convierta en un orientador, de expositor de conocimientos a ser un asesor agente, y el estudiante es quien hace suya la información, García Hernández y colaboradores (2019) dicen que ser aprendiz en el siglo XXI supone discernir, entre otras cosas, qué información necesitas, donde la vas a localizar y saber qué vas a hacer con dicha información.

El uso del multimedia es considerado como un instrumento que permite al estudiante elegir el mejor método y espacio para adquirir el conocimiento declarativo a su propio ritmo (TALBERT, 2012) dando al estudiante la responsabilidad de la aprehensión de contenidos pero también al docente, pues es él quien tiene la responsabilidad de organizar su práctica a fin de guiar las actividades hacia los objetivos (PILATASIG SOSAPANTA, 2021).

El lanzamiento de aulas virtuales puede ser uno de los mayores desafíos profesionales que enfrentan los docentes de todo el mundo, porque esta metodología debe

responder a los lineamientos del Ministerio de Educación y las escuelas, las expectativas de los padres, mantener a los estudiantes interesados y adquirir habilidades digitales (CRUZ COSTA et al., 2020). Esta metodología puede orientar las decisiones de enseñanza de todos los profesores. También puede tranquilizar a las personas y proporcionar a los padres información sobre sus hijos, información sobre nuevas formas de educación recibidas temporalmente (MARTINS e GOUVEIA, 2019). Permitir que el aula invertida logre el efecto deseado en actividades previsibles, es el desafío que se presenta, de lo contrario, se corre el riesgo que los profesores y los estudiantes estén abrumados por el esfuerzo y el cambio de una nueva metodología (HINOJO LUCENA et al., 2019).

BENEFICIOS DE LA APLICACIÓN DEL AULA INVERTIDA

Ledo y colaboradores (2016) mencionan algunos beneficios como:

- El alumno puede ir repitiendo el contenido tantas veces les sea necesario
- Practicar presencialmente con el apoyo adecuado tanto del profesor como de sus pares, ofreciendo atención mayormente individualizada, así como el espacio para retroalimentar y enriquecer participaciones
- El profesor dedica más tiempo a las diferencias individuales e interindividuales de los estudiantes, se personaliza el aprendizaje
- Se genera un ambiente de aprendizaje colaborativo en el aula
- Profesor y estudiantes aprovechan mejor el tiempo del aula
- Existe más interacción entre el profesor y el alumno
- El profesor tiene más oportunidades de dar feedback a los estudiantes al aumentar las interacciones con ellos
- Incrementa la motivación de los estudiantes
- El uso del vídeo proporciona la posibilidad de visualizar los contenidos tantas veces como se desee.
- Aumentan las interacciones entre los alumnos.
- Es propicio para una atención más personalizada del profesor a sus alumnos
- Los alumnos crean recursos de conocimiento tanto en la lección en casa como en los deberes en clase.
- Mejora la participación e interés del estudiante.
- Lecciones aprendidas por los estudiantes desde su propia experiencia.
- Aumentan las actividades cooperativas entre los componentes del equipo de trabajo.
- Potencia la autonomía y el aprendizaje activo en el estudiante.

- Asignar y ejecutar acciones de liderazgo en el equipo de trabajo con mucha ética y valores morales.

EVALUACIÓN DEL AULA INVERTIDA

Las aulas invertidas permiten que los profesores se conviertan en facilitadores, responsables de preparar diversos recursos y actividades para que los alumnos comprendan (DOS SANTOS OLIVEIRA et al., 2020). Por otro lado, el docente se compromete a observar, retroalimentar y evaluar el trabajo y aportes de los estudiantes, orientándolos de manera adecuada y oportuna (ROE et al., 2019). Finalmente, como lo explican Ledo y colaboradores (2016), el educador promueve el trabajo individual y grupal con el fin de que los alumnos logren un aprendizaje profundo de los contenidos.

Para Martínez y colaboradores (2014), evaluar de manera formativa como evidencia del proceso de aprendizaje (cuestionamientos cara a cara), se caracteriza por realizar evaluación sumativa periódicamente con pruebas escritas o demostración de una actividad asignada, de preferencia mediante evaluaciones computarizadas ya que aportan resultados inmediatos, retroalimentación, seguimiento y pueden intercambiar el orden de los ítems para cada evaluado en distintos momentos. Ver figura 1.

Figura 1. Aspectos de la evaluación en el aula invertida

LAS TICS Y LA EDUCACIÓN

"La escuela ha sido tradicionalmente, será y debe ser el reflejo de la sociedad" (CARRILLO SILES, 2009). Sin embargo, en las últimas décadas, la sociedad en que nos movemos ha experimentado una serie de cambios que quieran o no, afectan la educación y el modo en que aprendemos. Esto ha generado que se conciba la sociedad bajo el apelativo de "Sociedad de la información" (CARRILLO SILES, 2009) y que actualmente se denomine "sociedad de conocimiento", estableciendo una gran diferencia entre los datos que ofrece a la sociedad la información y la transformación de dicha información que construye el conocimiento (CASTELFRANCHI, 2018).

Daniela Salazar Ramírez (2017), dice al respecto:

"En la medida en que el ser humano avanza también ira evolucionando la sociedad, como un conjunto integrado por individuos adaptables y cambiantes, buscando siempre la unión de conocimientos a través de un solo medio, como lo es la tecnología, que provee la posibilidad de visualizar tradiciones y costumbres ancestrales, comparándolas con tendencias que se viven en la actualidad, dando como resultado una raza consciente de su existencia y de lo que debe atravesar y averiguar para una realización global".

Como lo menciona Sánchez Asín y colaboradores (2009):

Las TICs pueden jugar un papel muy importante en las grandes líneas en las que se enmarcarán nuestros sistemas educativos en este nuevo siglo, las cuales se centrarán en la innovación, la globalización, la ruptura de las fronteras culturales y lingüísticas, la movilidad virtual de los estudiantes, la emigración y la formación continua (pág. 179).

Desde este punto de vista, los actores del proceso educativo (tanto docentes como estudiantes) deben incursionar y capacitarse en este tipo de tecnologías que hoy en día están dominando la sociedad. Así lo confirma García & Gallego, (2010) al decir que, ante la globalización generalizada por la tecnología, la educación debe crear "un sujeto que asuma los cambios, cuente con más destrezas y distintas, conviva con el multiculturalismo y se integre en la globalidad" pues las TICs aportan entre otros beneficios, el aprendizaje cooperativo, el autoaprendizaje, la enseñanza individualizada y la flexibilización de la enseñanza (CABRERO ALMENARA, 2004).

Hoy en día, es necesario integrar las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas. Herrera Villamizar y colaboradores (2011) mencionan dos razones para ello: a) Para acercarse a la realidad profesional, puesto que en las empresas cada vez se usa más software específico y los estudiantes deben estar acostumbrados a utilizarlos, y b) para individualizar la formación y responder a la heterogeneidad creciente de los niveles, proponiendo softwares didácticos que permitan a los alumnos practicar y trabajar a su ritmo.

Diversos autores (CUICAS AVILA et al., 2007) (CASTILLO, 2008) haciendo referencia al uso de la tecnología en las matemáticas, declaran que ésta es esencial en la

enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que mejoran el proceso de aprendizaje de los estudiantes, así como su desempeño; les permite ejecutar procedimientos rutinarios en forma rápida y precisa, liberándoles tiempo para elaborar conceptos y modelos matemáticos, y aumentan la motivación por su aprendizaje.

Por último, la tecnología favorece la evaluación, permitiendo a los docentes examinar los procesos que han seguido los alumnos en sus investigaciones matemáticas, como también en los resultados obtenidos, enriqueciendo así la información disponible para tomar decisiones relacionadas con la enseñanza (HERRERA VILLAMIZAR et al., 2011). Gracias a ella, los docentes pueden desarrollar su capacidad creativa y motivar más fácilmente al estudiante para su aprendizaje, entre otros beneficios.

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Las matemáticas son consideradas fundamentales para el desarrollo y funcionamiento de la sociedad, como también en la formación integral de las personas, concibiéndose un elemento presente desde la niñez. No obstante, las dificultades en su aprendizaje producen bajo rendimiento académico, son causa de deserción escolar y exclusión social, ya que contribuye a la expulsión del sistema educativo (RIVAS, 2005).

Son varios los factores que inciden en las dificultades presentes en el aprendizaje matemático, y tienen que ver con deficiencias en la práctica pedagógica (MORENO CHANDLER, 2011) y con la influencia del afecto tanto de docentes como de estudiantes (CASTAÑEDA GONZÁLEZ e ÁLVAREZ TOSTADO URIBE, 2004).

Desde el punto de vista conductista, el aprendizaje es el producto de la relación estimulo-respuesta, también conocida como la pedagogía tradicional; es definida por De Zubiria Samper (2004) como heretoestructural, donde el maestro es el centro, quien decide e impone qué enseñar, el aprendizaje proviene de una fuente externa al alumno, quien toma un papel pasivo de receptor.

Desde el constructivismo cognitivo, Alarcón López y colaboradores (2011)definen el aprendizaje como un conjunto de fenómenos dependiente del contexto que debe ser descrito en términos de las relaciones internas entre el individuo, la cultura y la situación en la que el individuo está inmerso. Esta relación se produce a través de los conocimientos que el sujeto va adquiriendo y que influyen básicamente en los nuevos conocimientos que se le ofrecen; el profesor pasa a ser un orientador y mediador de dichas relaciones.

Evaluar matemáticas es más que medir cuánta información posee el alumno, implica evaluar su capacidad y disposición para utilizar, aplicar y comunicar toda esa información; debe incluir también la valoración de la disposición del alumno hacia la matemática, la confianza que tiene en su uso y hasta qué punto reconoce su importancia y utilidad (González, 2009 citado por (HERRERA VILLAMIZAR et al., 2011).

Para Ochoa (2008) citado por Herrera Villamizar y colaboradores (2011) evaluar

implica “recurrir a múltiples formas, instrumentos y procedimientos: las pruebas en papel, la evaluación práctica en el aula, el desarrollo de un taller, la redacción de un documento, el trabajo en grupo, el laboratorio, son varias posibilidades” (p.7). Por tal razón, las técnicas e instrumentos para evaluar en el área de matemáticas deben ser muy variados y adecuados al nivel que se pretende evaluar, y deberán proporcionar al educador la suficiente información para que pueda establecer un juicio sobre el nivel de logro.

CONCLUSIONES

El proceso para recolectar la información se desarrolló en cinco etapas:

1ra etapa: Diseño y aplicación de una encuesta para la recolección de datos. Se solicitó la autorización a la institución y aceptada ésta, se realizó un conversatorio sobre el proyecto de manera presencial con los padres de familia de cada grado.

2da etapa: Se aplicó un pre test (instrumento) de entrada al grupo focal, es decir, tanto para el grupo control (5to y 7mo) como para el grupo experimental (6to y 8vo) según el grado.

3era etapa: Se aplicó el enfoque de aula invertida al grupo experimental durante ocho semanas con 3 sesiones semanales de clase de aula invertida.

4ta etapa: Se aplicó un pos test (instrumento) de salida al grupo focal, es decir, tanto para el grupo control (5to y 7mo) como para el grupo experimental (6to y 8vo) según el grado.

5ta etapa: Tratamiento de los resultados. Se procede a procesar la información recogida empleándose recursos y herramientas digitales como tablas y gráficos y se realizó el análisis estadístico y la interpretación de datos a través del software SPSS ver. 25.

Al evaluar los resultados de la prueba de Shapiro-Wilk y la prueba de T Student, se obtuvieron diferencias significativas entre el pre test y el pos test en el grupo control y experimental; con una sig.=0.360 y una sig.=0.569 para los grados quinto y séptimo respectivamente, en ambos casos se rechaza la Hi y acepta la Ho que señala que aplicando el método tradicional de enseñanza y aprendizaje no existen diferencias significativas.

Con respecto al grupo experimental, el grado de significancia para el 6to y 8vo grado fue de sig=0.000, aceptando la Hi que señala que existen diferencias significativas en la aplicación de la metodología AI en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de matemáticas; lo que nos permite revelar la necesidad de la utilización de esta metodología para mejores aprendizajes en el área de estudio. Concluimos que la utilización de esta metodología reporta un aprendizaje significativo en el área de matemáticas en los estudiantes.

El efecto covid, ha permitido que gran parte de la población de los hogares adquieran dispositivos móviles e internet para el proceso de aprendizaje de sus hijos, situación que

más que nunca posibilita utilizar el método aula invertida porque la población estudiantil cuenta con la materia prima necesaria, lo que implica que los docentes no tengan excusa para no utilizar este método.

Para el desarrollo de la metodología AI, fueron aplicadas diferentes estrategias que, por la naturaleza del método (AI), involucraban las diferentes maneras que tiene el alumno para aprender, es decir, que incentivaban en diferentes formas sus canales de aprendizaje (Felder y Silverman, 1998, citados por Sánchez Vera, 2019) y llegar a todos los estilos de aprendizaje, lo que da una alta posibilidad de que los diferentes tipos de estudiantes aprendan en comparación al grupo control.

Finalmente, se puede concluir que el método es apto para el aprendizaje de las matemáticas, puesto que presenta una influencia positiva y estadísticamente significativa entre la metodología de aula invertida en los estudiantes del grupo experimental comparados con los resultados de los estudiantes del grupo control.

REFERENCIAS

ALARCÓN LÓPEZ, Francisco et al. **La concepción constructivista como modelo explicativo del aprendizaje en los deportes de equipo**. . [S.l: s.n.], 2011.

BERGMANN, Jonathan e SAMS, Aaron. **Dale la vuelta a tu clase : lleva tu clase a cada estudiante, en cualquier momento y cualquier lugar**. [S.l.]: S.M, 2014.

CABRERO ALMENARA, Julio. **Dialnet-LaTransformacionDeLosEscenariosEducativosComoConse-1448496**. 2004. Disponível em: <file:///E:/DESCARGAS/Dialnet-LaTransformacionDeLosEscenariosEducativosComoConse-1448496.pdf>. Acesso em: 23 sep. 2021.

CARO TORRES, María Catalina et al. **Modelo instruccional Blended- Flipped: personalización, flexibilización y metacognición para la nivelación en inglés en la educación superior**. Folios, n. 53, 2 dic. 2020.

CARRILLO SILES, Beatriz Autoría. **«Importancia de las tecnologias de la informacion y la comunicacion (tics) en el proceso educativo» etapa educación primaria e infantil»**. 2009.

CASTAÑEDA GONZÁLEZ, Alejandro e ÁLVAREZ TOSTADO URIBE, Ma. de Jesús. **La reprobación en Matemáticas. Dos experiencias**. Tiempo de Educar, v. 5, n. 2, 2004. Disponível em: <file:///E:/DESCARGAS/CATAÑEDA Y ALVAREZ 2004.pdf>. Acesso em: 28 sep. 2021.

CASTELFRANCHI, Cristiano. **Six critical remarks on science and the construction of the knowledge society**. Journal of Science Communication, v. 06, n. 04, p. C03, 17 ago. 2018.

CASTILLO, Sandra. **Pedagogical proposal based on constructivism for the optimal use of ict in the teaching and learning of mathematics**. . [S.l: s.n.], 2008. Disponível em: <file:///E:/DESCARGAS/CASTILLO 2008.pdf>. Acesso em: 28 sep. 2021.

CRUZ COSTA, José Benicio et al. **Atividades mão na massa: um método de sala de aula invertida para o ensino de física na Universidade Federal do Pará**. Brazilian Journal of Development, v. 6, n. 1, p. 404-412, 2020.

CUICAS AVILA, Marisol et al. **El software matemático como herramienta para el Desarrollo de habilidades del pensamiento y Mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas**. . [S.l: s.n.], 2007. Disponível em: <http://revista.inie.ucr.ac.cr>.

DE ZUBIRIA SAMPER, Miguel. **Enfoques Pedagógicosy Didácticas Contemporáneas**. . [S.l: s.n.], 2004. Disponível em: <file:///E:/DESCARGAS/DE ZUBIRÍA 2004.pdf>. Acesso em: 28 sep. 2021.

DÍAZ GARRIDO, Eloísa e MARTÍN-PEÑA, María Luz e SÁNCHEZ-LÓPEZ, José María. **The impact of Flipped Classroom on the motivation and learning of students in Operations Management**. WPOM-Working Papers on Operations Management, v. 8, n. 1989-9068, p. 15, 7 jun. 2017. Disponível em: <https://polipapers.upv.es/index.php/WPOM/article/view/7091>.

DOMÍNGUEZ, Luis Carlos et al. **Impacto de la estrategia de aula invertida en el ambiente de aprendizaje en cirugía: Una comparación con la clase magistral**. Biomedica, v. 35, n. 4, p. 513-521, 2015. Disponível em: <http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-41572015000400009>.

DOS SANTOS OLIVEIRA, João Lucas et al. **Sala de aula 4.0 - Uma proposta de ensino remoto baseado em sala de aula invertida, gamification e PBL**. Revista Brasileira de Informática na Educação, v. 28, p. 909-933, 14 dic. 2020.

FUNEME MATEUS, Cristian Camilo. **El aula invertida y la construcción de conocimiento en matemáticas. El caso de las aplicaciones de la derivada**. Universidad Pedagógica Nacional; Facultad de Ciencia y Tecnología;, v. 45, p. 159-174, 2019. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=614264674008>.

GALLEGOS ZURITA, Diana e GALLEGOS ZURITA, Maritza. **Implementación de la clase invertida como propuesta metodológica en el aprendizaje de la Ley de Distribución de Planck**. INNOVA Research Journal, v. 2, n. 6, p. 112-119, 2017.

GARCÍA, Catalina M Alonso e GALLEGO, Domingo J. **Los estilos de aprendizaje como competencias para el estudio, el trabajo y la vida learning styles as skills for study, work and life**. Revista de Estilos de Aprendizagem, nº6. [S.l: s.n.], 2010.

GARCÍA HERNÁNDEZ, M.L. e PORTO CURRÁS, M. e HERNÁNDEZ VALVERDE, F.J. **El aula invertida con alumnos de primero de magisterio: fortalezas y debilidades**. REDU. Revista de Docencia Universitaria, v. 17, n. 2, p. 89, 30 dic. 2019.

GRAHAM BRENT, Johnson. **Student perceptions of the flipped classroom**. . Okanagan: [s.n.], 2013.

HERRERA VILLAMIZAR, Nancy Liliana e MONTENEGRO VELANDIA, Wilson e POVEDA JAIMES, Salvador. **Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**. . [S.l: s.n.], 2011. Disponível em: <http://revistavirtual.ucn.edu.co/]http://revistavirtual.ucn.edu.co/]>.

HINOJO LUCENA, Francisco J et al. **Influencia del aula invertida en el rendimiento académico. Una revisión sistemática**. Campus Virtuales, v. 8, n. 1, p. 9-18, 2019. Disponível em: <www.revistacampusvirtuales.es>.

JANSSEN, Camiel Herman Cornells. **The flipped classroom during COVID-19**. Educacion Quimica, v. 31, n. 5, p. 173-178, 1 dic. 2020.

LEDO, María Vidal et al. **Aula invertida, nueva estrategia didáctica The flipped classroom, a new didactic strategy**. Educación Médica Superior. [S.l: s.n.], 2016. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Waltraud_Olvera/publication/2737654>.

MARTÍNEZ, Waltraud e ESQUIVEL, Ismael e MARTÍNEZ, Jaime. **Aula Invertida o Modelo Invertido de Aprendizaje : Origen , Sustento e Implicaciones**. Los modelos Tecno-Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI, p. 143-160, 2014. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/273765424>.

MARTINS, Ernane R e GOUVEIA, Luís M B. **ML-SAI: Modelo pedagógico fundamentado na sala de aula invertida destinado a atividades de m-learning ML-SAI: Pedagogical model based on inverted classroom intended for m-learning activities**. . [S.l: s.n.], 2019. Disponível em: <http://ww.revistaespacios.com/a19v40n36/a19v40n36p19.pdf>. Acesso em: 24 sep. 2021.

MORENO CHANDLER, Luis. **Dificultades de aprendizaje en matemática**. . [S.l: s.n.], 2011. Disponível em: <file:///E:/DESCARGAS/MORENO 2011.pdf>. Acesso em: 28 sep. 2021.

PILATASIG SOSAPANTA, Adriana Valeria. **Metodología de aula invertida en el proceso de aprendizaje de Contabilidad del tercer año de Bachillerato de la Unidad Educativa Jacinto Jijón y Caamaño en el período lectivo 2020-2021**. 2021. 1-150 f. Universidad Central del Ecuador, Quito, 2021.

RIVADENEIRA BARREIRO, María Piedad et al. **Breve aproximación teórica al modelo de aula invertida y su posible contribución al desarrollo de habilidades investigativas en estudiantes universitarios brief theoretical approach to the flipped classroom model and its possible contribution to the devel**. . [S.l: s.n.], 2020. Disponível em: <http://cutt.ly/AaObUOAhttps://orcid.org/0000-0002-4218-3453maria.chavez01@utm.edu.ec+593985909422https://cutt.ly/WfLE6WU>.

RIVAS, Pedro Jose. **La educación matemática como factor de deserción escolar y exclusión social**. Disponível em: <http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102005000200004>. Acesso em: 29 sep. 2021.

ROE, Yngve et al. **Learning with technology in physiotherapy education: Design, implementation and evaluation of a flipped classroom teaching approach**. BMC Medical Education, v. 19, n. 1, 31 jul. 2019.

SALAZAR RAMÍREZ, Daniela. **Las TIC como desarrollo personal y social**. Desbordes. Revista de Investigaciones. Escuela de Ciencias sociales, artes y humanidades - UNAD, v. 6, p. 151, 2017.

SÁNCHEZ ASÍN, Antonio e BOIX PEINADO, Josep Lluís e JURADO DE LOS SANTOS, Pedro. **Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación**. revista medios y educacion, 2009. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=36812036013>.

SÁNCHEZ VERA, María Jesús. **Estilos de aprendizaje**. . [S.l: s.n.], 2019.

TALBERT, Robert. **Inverted classroom**. Journal of Education Reform, v. 9, n. 1, p. 1-19, 2012. Disponível em: <http://scholarworks.gvsu.edu/colleagueshttp://scholarworks.gvsu.edu/colleagues/vol9/iss1/7>.

VALENTE, José Armando. **Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida**. Educar em Revista, n. spe4, p. 79-97, 2014.

ZAMBRANO VACACELA, Leonardo e YAUTIBUG CHIMBOLEMA, Mario. **Modelo AIM para la enseñanza-aprendizaje con estudiantes de modalidad semipresencial-distancia en la Universidad Nacional de Educación**. Killkana Social, v. 4, n. 1, p. 13-20, 2 abr. 2020.

SOBRE O ORGANIZADOR

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou, como formador, do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador, o Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (CNPq/PPGESA-Uneb), na condição de vice-líder e o Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/LEPEM-Uneb) na condição de líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM) e da Revista Multidisciplinar do Núcleo de Pesquisa e Extensão (RevNUPE); e coordenador do Encontro de Ludicidade e Educação Matemática (ELEM).

ÍNDICE REMISSIVO

R

S

T

W

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Ano 2022

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Ano 2022